

Profinitude de la cohomologie étale mod p pour les courbes partiellement propres

Yicheng Zhou*

3 février 2026

Résumé

Nous démontrons que l'application de groupes de cohomologie étale à coefficients dans $\mathbf{F}_p$ entre deux courbes affinoïdes rigides sur une extension finie K de $\mathbf{Q}_p$, l'une strictement incluse dans l'autre, est d'image finie. Comme corollaire, nous obtenons la profinitude des groupes de cohomologie étale pour les faisceaux Zariski-constructibles sur les courbes rigides partiellement propres sur K . Nous obtenons aussi des résultats parallèles pour la cohomologie étale à support compact.

Table des matières

0	Introduction	1
1	Préliminaires	3
1.1	Applications d'image finie	4
1.2	Cycles proches formels-rigides	6
2	Conséquences de la conjecture	9
2.1	Profinitude pour les espaces rigides partiellement propres	9
2.2	Profinitude pour les coefficients Zariski-constructibles	12
2.3	Application aux tours de Drinfeld en niveau fini	16
3	Preuve de la conjecture (0.6) pour les courbes	18
3.1	Cas des modèles semi-stables d'une inclusion stricte	18
3.2	Cas des courbes lisses	26
3.3	Cas des courbes générales	28
A	Cas de Stein à réduction semi-stable	35

0 Introduction

0.1. Notation et convention. Fixons un nombre premier p . Soit K une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ d'anneau des entiers $\mathcal{O}_K$ et de corps résiduel $k = \mathbf{F}_q$ (sauf mention expresse du contraire). Notons $\mathfrak{m}_K$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_K$. Fixons C le complété d'une clôture algébrique de K .

Nous considérons la cohomologie étale des espaces rigides (analytique) sur K ou sur C au sens de Huber [31]. Un espace rigide de dimension 1 sur K sera appelé une *courbe* sur K .

0.2. Nous nous intéressons à diverses propriétés de finitude des groupes de cohomologie en géométrie algébrique et géométrie analytique. Limitons-nous aux cohomologies singulière et étale.

*Email : yicheng.zhou@universite-paris-saclay.fr.

En géométrie analytique complexe, tout espace analytique complexe compact étant homotopiquement équivalent à un complexe CW fini [59, 38], ses groupes de cohomologie singulière à coefficients dans $\mathbf{Z}$ (qui coïncident avec les groupes de cohomologie du faisceau constant $\underline{\mathbf{Z}}$ pour la topologie usuelle) sont des groupes abéliens de type fini. Dans le cas d'une variété complexe lisse et compacte, la finitude peut aussi se voir par la suite spectrale de Leray appliquée à un recouvrement ouvert fini de la variété tel que toutes les intersections des ouverts sont contractiles [18, Lemma 6.9].

En géométrie algébrique, il se trouve que le bon analogue de la cohomologie singulière à considérer est la cohomologie étale, définie comme la cohomologie de faisceaux pour la topologie étale proposée par Grothendieck, et qu'il faudrait l'étudier avec les coefficients dans un groupe de torsion Λ , parmi lesquels les plus simples sont les faisceaux constants $\mathbf{Z}/n$, avec $n \in \mathbf{Z}$. Il est démontré que les groupes de cohomologie étale $H_{\text{ét}}^i(X, \mathbf{Z}/n)$ sont finis pour les variétés algébriques propres X sur un corps algébriquement clos de caractéristique 0, mais sa preuve est beaucoup moins élémentaire qu'en topologie à cause du fait que les variétés algébriques ne sont plus nécessairement localement contractile. Cette finitude se généralise aux morphismes de type fini de schémas excellents sur $\mathbf{Q}$ et aux coefficients constructibles [3, exposé XIX].

En géométrie analytique sur un corps non archimédien de caractéristique résiduelle p , Huber [31, Proposition 6.1.1] a prouvé cette finitude pour les variétés analytiques quasi-compactes et quasi-séparées et les faisceaux constructibles, à condition que la multiplication par p soit inversible sur le faisceau.

La situation pour les faisceaux constants p -primaires est délicate. Pour simplicité, regardons d'abord les variétés analytiques sur C . L'analogue naïf de la finitude même pour les coefficients $\mathbf{Z}/p$ est faux pour les variétés analytiques générales sur C qui sont non propres, comme nous pouvons le voir par le calcul pour la boule unité fermée $\mathbf{B}_C^1$. En effet, fixons une racine p -ième primitive ζ_p de l'unité, de sorte que nous pouvons identifier (non canoniquement) les faisceaux étales $\mathbf{F}_p \simeq \mu_p$ sur X . À l'aide de la suite exacte de Kummer sur $X_{\text{ét}}$

$$0 \rightarrow \mu_p \rightarrow \mathcal{O}_X^\times \xrightarrow{(-)^p} \mathcal{O}_X^\times \rightarrow 0,$$

on déduit un isomorphisme (non canonique)

$$H_{\text{ét}}^1(\mathbf{B}_C^1, \mathbf{F}_p) \simeq C\langle T \rangle^\times / C\langle T \rangle^{\times p},$$

qui est un groupe infini. Cependant, la finitude pour les variétés analytiques *propres* sur C était attendue, mais cette question est restée ouverte longtemps avant que Scholze ne l'affirme en démontrant le théorème de comparaison primitif [48, Theorem 5.1], qui relie la cohomologie étale d'un $\mathbf{F}_p$ -système local à la cohomologie du faisceau cohérent pro-étale associé. Ce dernier point de vue permet de développer un formalisme des six-foncteurs en géométrie analytique p -adique [39, 2]. En plus, un analogue des faisceaux constructibles dans le cas p -primaire, proposé par Bhatt et Hansen, est les faisceaux *Zariski-constructibles*, dont des propriétés de permanence ont été étudiées dans [5, 37].

0.3. Nous nous intéressons dès maintenant à la finitude des groupes de cohomologie étale $H_{\text{ét}}^n(X, \Lambda)$ à coefficients dans un groupe de torsion $\Lambda = \mathbf{Z}/n$ pour les espaces rigides X quasi-compactes et quasi-séparés sur une extension finie K de $\mathbf{Q}_p$.

Si n est premier à p , la finitude est due à Huber [31, Proposition 6.1.1]. Mais l'analogue p -primaire est faux en général. En effet, en supposons que K contient une racine p -ième primitive de l'unité, et à l'aide de la suite exacte de Kummer, on déduit qu'il existe un morphisme injectif

$$K\langle T \rangle^\times / K\langle T \rangle^{\times p} \hookrightarrow H_{\text{ét}}^1(\mathbf{B}_K^1, \mathbf{F}_p).$$

Contenant un sous-groupe isomorphe à $K\langle T \rangle^\times / K\langle T \rangle^{\times p}$, qui est infini, le groupe $H_{\text{ét}}^1(\mathbf{B}_K^1, \mathbf{F}_p)$ est également infini. Néanmoins, si X est propre sur K , la finitude est vraie et découle de la finitude sur C de Scholze et de la suite spectrale de Hochschild-Serre par la finitude de la cohomologie galoisienne d'un module fini (le corps K étant une extension finie de $\mathbf{Q}_p$) [51, chapitre II, §5.2].

0.4. Dans les travaux Colmez, Dospinescu et Nizioł [14, théorème 2.1] sur la géométrisation de la correspondance de Langlands locale p -adique pour $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, un ingrédient technique important est la profinitude de la cohomologie étale mod p de tous les niveaux finis de la tour de Drinfeld, qui sont des espaces rigides Stein sur (une extension finie de) $\mathbf{Q}_p$. Sa démonstration repose fortement sur l'existence d'un bon modèle semi-stable

global, et pourra se généraliser à tous les espaces *Stein à réduction semi-stables* (voir la proposition (A.2) pour les détails).

0.5. Une interpolation entre ces deux résultats précédents, la finitude d'un côté pour les espaces rigides propres et la profinitude de l'autre côté pour les espaces rigides Stein, suggère qu'il y aurait une profinitude des systèmes de groupes de cohomologie étale pour une suite strictement croissante d'ouverts quasi-compacts (ou simplement d'ouverts affinoïdes).

Nous aurions voulu envisager une finitude de $H_{\text{ét}}^n(\overline{X}, \mathbf{F}_p)$, avec $j: X \rightarrow \overline{X}$ la compactification universelle d'un espace rigide affinoïde X sur K à la Huber [31, Theorem 5.1.5]. Pourtant, ceci est faux, puisque le faisceau étale $R^m j_* j^* \mathcal{F}$ s'annule pour $m > 0$ pour tout faisceau étale *surconvergent* $\mathcal{F}$ sur $\overline{X}$ selon [31, Proposition 8.1.2, ii)]; en particulier, pour le faisceau constant $\mathbf{F}_p$, on a $H_{\text{ét}}^n(\overline{X}, \mathbf{F}_p) \xrightarrow{\sim} H_{\text{ét}}^n(X, \mathbf{F}_p)$, qui est un groupe énorme.

Ainsi, la finitude de l'image que nous allons montrer ne semble pas être incarnée dans la finitude de certain objet géométrique ne dépendant que de l'affinoïde intérieur; plus l'affinoïde extérieur s'en approche, plus grande est l'image de l'application de groupes de cohomologie. Ceci conduit à la conjecture suivante :

0.6 - Conjecture. *Soit $U \subset^\dagger X$ une inclusion ouverte stricte d'affinoïdes rigides sur K . Alors pour tous $n, m \in \mathbf{N}$, les applications induites $H_{\text{ét}}^n(X, \mathbf{Z}/p^m) \rightarrow H_{\text{ét}}^n(U, \mathbf{Z}/p^m)$ et $H_{\text{ét},c}^n(U, \mathbf{Z}/p^m) \rightarrow H_{\text{ét},c}^n(X, \mathbf{Z}/p^m)$ sont d'image finie.*

0.7. Signalons d'abord quelques conséquences de la conjecture (cf. Section 2). D'une part, la conjecture en dimension d impliquerait la profinitude du groupe de cohomologie étale d'un espace rigide partiellement propre de dimension d sur K , qui serait la limite projective des groupes de cohomologie étale d'une suite d'ouverts quasi-compacts strictement croissante dont la réunion est l'espace total. D'autre part, si la conjecture était vraie en toute dimension $\leq d$, alors un dévissage due à Hansen [30] permettrait d'en déduire la conjecture pour tous les coefficients Zariski-constructibles.

0.8. Nous allons démontrer cette finitude *seulement en dimension 1*, autrement dit, *pour les courbes*, cf. le théorème (3.3.14), tout en ignorant le cas de dimension supérieure. Nous obtiendrons ainsi, sans faire intervenir des modèles semi-stables *global*, une autre preuve d'une version affaiblie de [14, théorème 2.1], qui suffirait pour son application arithmétique.

Concernant la preuve de la conjecture pour les courbes, nous en donnerons deux, l'une dans le cas lisse (cf. section 3.2) et l'autre dans le cas général (cf. section 3.3). Elles suivront la même ligne : étudier le cas de réduction semi-stable (cf. section 3.1), et y ramener dans le cas général.

La première étape se restreint fortement aux *courbes*, alors que la deuxième, malgré le théorème de réduction semi-stable pour les courbes, peut se réaliser en dimension quelconque par hyperdescente grâce aux résultats de résolution des singularités en caractéristique mixte dus à Saito et à Temkin.

0.9. Remerciement. Cet article fait partie de la thèse de l'auteur, qui voudrait remercier sincèrement sa directrice Wiesława Nizioł pour tout son soutien et encouragement ainsi que les discussions sur ce projet, et pour ses corrections et commentaires sur des versions préliminaires de ce manuscrit. Il remercie aussi Kęstutis Česnavičius et Alberto Vezzani dont la lecture soigneuse et les remarques ont contribué à l'amélioration de ce travail. L'auteur voudrait remercier la Fondation de l'École polytechnique, la Simons Collaboration on Perfection in Algebra, Geometry, and Topology et la Fondation Mathématique Jacques Hadamard pour leur soutien pendant ce projet.

1 Préliminaires

Dans cette section, nous rassemblons des résultats préliminaires qui seront systématiquement utilisés dans les preuves. D'abord seront présentées des généralités de base concernant les applications d'image finie, notamment leur comportement par rapport à la suite spectrale. Ensuite, en suivant [14, 2.1], nous rappellerons la filtration de Bloch-Kato-Hyodo sur les faisceaux de cycles proches pour les schémas formels et l'identification des gradués.

1.1 Applications d'image finie

1.1.1. Soit $\{A_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ un système projectif de groupes abéliens. On dit qu'il est *profini* si pour tout $i \in \mathbf{N}$, l'application $A_{i+1} \rightarrow A_i$ est d'image finie. On dit qu'il est *essentiellement profini* s'il existe un système $\{A'_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ profini entretenant $\{A_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ quitte à extraire une sous-ensemble d'indices de $\mathbf{N}$, ou ce qui revient au même, s'il existe un autre système $\{A'_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ entretenant $\{A_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ (quitte à extraire un sous-système de ce dernier) avec A'_i des groupes abéliens finis. Tout système profini est essentiellement profini.

1.1.2 - Lemme. Si $\{A_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ est un système projectif de groupes abéliens essentiellement profini, alors $R^1 \lim_i A_i = 0$.

Démonstration. Le système $\{A_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ vérifie la condition de Mittag-Leffler. $\square$

1.1.3 - Lemme. Soit $(f_i)_{i \in \mathbf{N}}: \{A_i\}_{i \in \mathbf{N}} \rightarrow \{B_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ un morphisme de systèmes projectifs de groupes abéliens. Si les morphismes $A_{i+1} \rightarrow A_i$ et $B_{i+1} \rightarrow B_i$ sont tous d'image finie, alors il en est de même pour le système des noyaux $\{\ker f_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ et celui des conoyaux $\{\text{coker } f_i\}_{i \in \mathbf{N}}$.

Démonstration. C'est évident, car on a des injections $\text{im}(\ker f_{i+1} \rightarrow \ker f_i) \hookrightarrow \text{im}(A_{i+1} \rightarrow A_i)$ et des surjections $\text{im}(B_{i+1} \rightarrow B_i) \twoheadrightarrow \text{im}(\text{coker } f_{i+1} \rightarrow \text{coker } f_i)$. $\square$

1.1.4 - Lemme. Soit

$$\begin{array}{ccccc} & & A_k & \longrightarrow & A''_k \\ & & \downarrow \pi_{kj} & & \downarrow \pi''_{kj} \\ A'_j & \xrightarrow{f_j} & A_j & \xrightarrow{g_j} & A''_j \\ \downarrow \pi'_{ji} & & \downarrow \pi_{ji} & & \\ A'_i & \xrightarrow{f_i} & A_i & & \end{array}$$

un diagramme commutatif de groupes abéliens tel que la suite horizontale du milieu est exacte et les deux flèches verticales de côté sont d'image finie. Alors la composée des flèches verticale au du milieu est aussi d'image finie.

Démonstration. On vérifie que $\text{im}(\pi_{ji} \circ \pi_{kj}) \subset \text{im}(f_i \circ \pi'_{ji}) + \pi_{ji}(\text{im}(\pi''_{kj}))$, où l'on a noté $\text{im}(\pi''_{kj})$ pour un choix d'ensemble fini d'antécédents de $\text{im}(\pi''_{kj})$ dans A_j . $\square$

1.1.5 - Lemme. Soit

$$E_r^{i,j}(t) \Rightarrow E_\infty^{i+j}(t), \quad t \in \mathbf{N}$$

un système projectif de suites spectrales convergentes de groupes abéliens. Supposons que pour tout $t \in \mathbf{N}$ et tous i, j , le morphisme $E_r^{i,j}(t+1) \rightarrow E_r^{i,j}(t)$ soit d'image finie.

Soit $n \in \mathbf{N}$. S'il existe un intervalle $[m_1, m_2]$ d'extrémités entières tel que la filtration spectrale sur $E_\infty^n(s)$ pour tout $s \in \mathbf{N}$ est concentrée en degrés dedans, alors pour tout $t \in \mathbf{N}$, le morphisme

$$E_\infty^n(t + (m_2 - m_1 + 1)) \rightarrow E_\infty^n(t)$$

est d'image finie.

Démonstration. Par hypothèse et d'après le lemme (1.1.3), pour tout $i \in \mathbf{Z}$ et tout $t \in \mathbf{N}$, le morphisme $E_\infty^{i,n-i}(t+1) \rightarrow E_\infty^{i,n-i}(t)$ est d'image finie. Or, pour tout $t \in \mathbf{N}$, le groupe $E_\infty^n(t)$ est une extension successive des $E_\infty^{i,n-i}(t)$, $i \in [m_1, m_2]$. Alors, en appliquant $m_2 - m_1$ fois le lemme (1.1.4), on peut conclure.

Expliquons l'entier $m_2 - m_1$ ici. En effet, dénotant par $\text{Fil}^i(t)$ la filtration spectrale sur l'aboutissement $E_\infty^n(t)$, montrons par récurrence sur l'entier $i \in [m_1 + 1, m_2 + 1]$ que

($\star_i$) Pour tout $t \in \mathbf{N}$, l'application $E_\infty^n(t + i - m_1) \rightarrow E_\infty^n(t)/\text{Fil}^i(t)$ est d'image finie.

Notons que l'on aura $\text{Fil}^{m_2+1}(t) = 0$, ce qui permettra de conclure le lemme. D'abord, si $i = m_1 + 1$, l'image en question est égale à celle de $E_\infty^{m_1,n-m_1}(t+1) \rightarrow E_\infty^{m_1,n-m_1}(t)$, donc est finie. Supposons maintenant que ($\star_i$) soit

vraie pour certain $i \in [m_1 + 1, m_2]$. Considérons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc}
& E_\infty^n(t + i + 1 - m_1) & \xrightarrow{\text{id}} & E_\infty^n(t + i + 1 - m_1) & \\
& \downarrow & & \downarrow & \\
E_\infty^{i, n-i}(t+1) & \longrightarrow & E_\infty^n(t+1)/\text{Fil}^{i+1}(t+1) & \longrightarrow & E_\infty^n(t+1)/\text{Fil}^i(t+1) \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
E_\infty^{i, n-i}(t) & \longrightarrow & E_\infty^n(t)/\text{Fil}^{i+1}(t) & &
\end{array}$$

dont la suite horizontale du milieu est exacte. La flèche verticale en bas à gauche est d'image finie, et celle en haut à droite l'est aussi par $(\star_i)$. On en déduit $(\star_{i+1})$ en appliquant une fois le lemme (1.1.4). $\square$

1.1.6 - Corollaire. Soit

$$E_r^{i,j}(t) \Rightarrow E_\infty^{i+j}(t), \quad t \in \mathbf{N}$$

un système projectif de suites spectrales convergentes de groupes abéliens qui sont concentrées au premier quadrant. Supposons que pour tout $t \in \mathbf{N}$ et tous i, j , le morphisme $E_r^{i,j}(t+1) \rightarrow E_r^{i,j}(t)$ soit d'image finie.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Alors pour tout $t \in \mathbf{N}$, le morphisme

$$E_\infty^n(t + n + 1) \rightarrow E_\infty^n(t)$$

est d'image finie.

1.1.7 - Remarque. Présentons une preuve alternative du lemme mais plus générale. On pourra considérer pour tout $t \in \mathbf{N}$ la filtration décroissante $\text{Fil}_{\text{twist}}^\bullet$ sur $E_\infty^n(t)$ définie par

$$\text{Fil}_{\text{twist}}^i E_\infty^n(t) := \begin{cases} E_\infty^n(t) & \text{si } i \leq m_1 \\ \sum_{j \geq i} E_\infty^n(t) \cap \text{Fil}^j(t - j + m_1) & \text{si } i \in [m_1 + 1, m_2] \end{cases}.$$

où $E_\infty^n(t) \cap \text{Fil}^j(t - k)$ dénote l'image réciproque de $\text{Fil}^j(t - j)$ par $E_\infty^n(t) \rightarrow E_\infty^n(t - k)$ pour $k \geq 0$. La filtration $\text{Fil}_{\text{twist}}^i$ est stable à partir de $i \geq m_2 + 1$, et on a

$$\text{Fil}_{\text{twist}}^i E_\infty^n(t) = \ker(E_\infty^n(t) \rightarrow E_\infty^n(t - (m_2 - m_1 + 1))), \quad \forall i \geq m_2 + 1.$$

Étudions les gradués. On a $\text{gr}_{\text{twist}}^i \neq 0$ seulement si $i \in [m_1, m_2]$. Pour tels i , le gradué $\text{gr}_{\text{twist}}^i$ reçoit une surjection comme suit

$$\begin{array}{ccc}
\text{im}(E_\infty^{i, n-i}(t) \rightarrow E_\infty^{i, n-i}(t - i + m_1)) & & \\
\uparrow \simeq & & \\
\frac{E_\infty^n(t) \cap \text{Fil}^i(t - i + m_1)}{E_\infty^n(t) \cap \text{Fil}^{i+1}(t - i + m_1)} & \twoheadrightarrow & \frac{E_\infty^n(t) \cap \text{Fil}^i(t - i + m_1)}{(E_\infty^n(t) \cap \text{Fil}^i(t - i + m_1)) \cap (\sum_{j \geq i+1} E_\infty^n(t) \cap \text{Fil}^j(t - j + m_1))} \\
& & \downarrow \simeq \\
& & \frac{\text{Fil}_{\text{twist}}^i E_\infty^n(t)}{\text{Fil}_{\text{twist}}^{i+1} E_\infty^n(t)},
\end{array}$$

d'où la finitude de $\text{gr}_{\text{twist}}^i E_\infty^n(t)$. On en tire la finitude de

$$\begin{aligned}
\text{Fil}_{\text{twist}}^0 E_\infty^n(t) / \text{Fil}_{\text{twist}}^{+\infty} E_\infty^n(t) &= E_\infty^n(t) / \ker(E_\infty^n(t) \rightarrow E_\infty^n(t - (m_2 - m_1 + 1))) \\
&\xrightarrow{\simeq} \text{im}(E_\infty^n(t) \rightarrow E_\infty^n(t - (m_2 - m_1 + 1))).
\end{aligned}$$

1.1.8 - Corollaire. Soient $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne et $\mathcal{A}_0$ une sous-catégorie épaisse. Soit

$$E_r^{i,j}(t) \Rightarrow E_\infty^{i+j}(t), \quad t \in \mathbf{N}$$

un système projectif de suites spectrales dans $\mathcal{A}$ convergentes. Supposons que pour tout $t \in \mathbf{N}$ et tous i, j , le morphisme $E_r^{i,j}(t+1) \rightarrow E_r^{i,j}(t)$ soit d'image dans $\mathcal{A}_0$.

Soit $n \in \mathbf{N}$. S'il existe un intervalle $[m_1, m_2]$ d'extrémités entières tel que la filtration spectrale sur $E_\infty^n(s)$ pour tout $s \in \mathbf{N}$ est concentrée en degrés dedans, alors pour tout $t \in \mathbf{N}$, le morphisme

$$E_\infty^n(t + (m_2 - m_1 + 1)) \rightarrow E_\infty^n(t)$$

est d'image dans $\mathcal{A}_0$.

Démonstration. Il suffit d'établir que les morphismes $E_\infty^{i,j}(t+1) \rightarrow E_\infty^{i,j}(t)$ sont d'image dans $\mathcal{A}_0$, car on pourra alors appliquer l'analyse dans la remarque précédente pour conclure, en tenant compte du fait que $\mathcal{A}_0$ est stable par extensions et quotients. Pour cela, il suffit de montrer que les morphismes $E_{r+1}^{i,j}(t+1) \rightarrow E_{r+1}^{i,j}(t)$ sont d'image dans $\mathcal{A}_0$ et de raisonner par récurrence. Comme dans la preuve de (1.1.3), on trouve que $\ker d_r^{i,j}(t+1) \rightarrow \ker d_r^{i,j}(t)$ est d'image un sous-objet de $\mathrm{im}(E_\infty^{i,j}(t+1) \rightarrow E_\infty^{i,j}(t))$, donc dans $\mathcal{A}_0$, et que $\mathrm{im} d_r^{i-r,j+r-1}(t+1) \rightarrow \mathrm{im} d_r^{i-r,j+r-1}(t)$ est d'image un quotient de $\mathrm{im}(E_\infty^{i-r,j+r-1}(t+1) \rightarrow E_\infty^{i-r,j+r-1}(t))$, donc dans $\mathcal{A}_0$. Finalement, on conclut en prenant leurs quotients $E_{r+1}^{i,j}(\cdot) = \ker d_r^{i,j}(\cdot) / \mathrm{im} d_r^{i-r,j+r-1}(\cdot)$. $\square$

1.1.9 - Proposition ([41, Remark 1.2.2.4, Proposition 1.2.4.5]). Soit $\mathcal{C}$ une ∞ -catégorie stable munie d'une t -structure de cœur $\mathcal{A}$ (le nerf d'une catégorie abélienne). Soit $A^\bullet$ un objet cosimplicial dans $\mathcal{C}^{\geq 0}$. On a une suite spectrale convergente

$$E_1^{i,j} = E_1^{i,j}(A^\bullet) \Rightarrow \pi_{i+j}(\lim_{\Delta} A^\bullet)$$

avec la première page $(E_1^{\bullet,j}, d_1)$ identifiée au complexe normalisé associé par la correspondance de Dold-Kan à l'objet simplicial $\pi_j(A^\bullet)$ de $\mathcal{A}$.

Démonstration. C'est loc. cit. appliquée à la catégorie opposée $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$. $\square$

1.1.10 - Lemme. Soit $A_1^\bullet \rightarrow \dots \rightarrow A_{r+1}^\bullet$ une chaîne d'objets cosimpliciaux dans $\mathcal{D}^{\geq 0}(\mathbf{Z})$. Supposons que pour tout $t \in [1, r]$ et tous $i, j \in \mathbf{N}$, le morphisme $\pi_j(A_{t+1}^{[i]}) \rightarrow \pi_j(A_t^{[i]})$ est d'image finie. Alors pour tous $n \in \mathbf{N}$ et $t \in [1, r+1 - (n+1)]$, le morphisme

$$\pi_n(\lim_{\Delta} A_{t+n+1}^\bullet) \rightarrow \pi_n(\lim_{\Delta} A_t^\bullet)$$

est d'image finie.

Démonstration. Pour tout $t \in [1, r+1]$, la suite spectrale (1.1.9) est concentrée au premier quadrant. Vu la compatibilité entre les suites spectrales pour les différents $t \in [1, r+1]$ et par lemme (1.1.6), il reste à montrer que pour tout $t \in [1, r]$ et tous $i, j \in \mathbf{N}$, le morphisme $E_1^{i,j}(A_{t+1}^\bullet) \rightarrow E_1^{i,j}(A_t^\bullet)$ est d'image finie.

Pour ceci, rappelons que le complexe $(E_1^{\bullet,j}, d_1)$ identifié au complexe normalisé associé à l'objet simplicial $\pi_j(A^\bullet)$ de $\mathcal{D}^{\geq 0}(\mathbf{F}_p)$ est plus précisément décrit par

$$E_1^{i,j} = \mathrm{coker} \left(\sum_{k=0}^{i-1} \delta_k^j : \bigoplus_{k=0}^{i-1} \pi_j(A^{i-1}) \rightarrow \pi_j(A^i) \right).$$

Pour $t \in [1, r]$ et $i, j \in \mathbf{N}$, le morphisme $\pi_j(A_{t+1}^i) \rightarrow \pi_j(A_t^i)$ est d'image finie, donc le morphisme $E_1^{i,j}(A_{t+1}^\bullet) \rightarrow E_1^{i,j}(A_t^\bullet)$ l'est aussi par lemme (1.1.3). $\square$

1.2 Cycles proches formels-rigides

1.2.1. Un schéma sur $\mathcal{O}_K$ est dit *strictement semi-stable* (resp. *semi-stable*) s'il est, localement pour la topologie de Zariski (resp. pour la topologie étale), étale sur un schéma formel semi-stable standard

$$\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K[X_0, \dots, X_n] / (X_0 \cdots X_r - \varpi), \quad 0 \leq r \leq n,$$

où ϖ est une uniformisante de K . On peut également définir semi-stabilité (resp. stricte semi-stabilité) pour les schémas formels en considérant le spectre formel Spf au lieu du spectre Spec .

1.2.2. Algébrisation et cycles proches. Rappelons que si $\mathfrak{X}$ est un schéma formel localement de type fini sur $\mathcal{O}_K$, on dispose d'une application continue dite *réduction* ou *de spécialisation* $\lambda_{\mathfrak{X}} : \mathfrak{X}_\eta \rightarrow \mathfrak{X}$.

Si $\mathfrak{X} = \mathcal{X}_p^\wedge$ est le schéma formel complété p -adique d'un schéma algébrique $\mathcal{X}$ localement de type fini sur $\mathcal{O}_K$ le long de sa fibre spéciale, alors on dispose d'un morphisme de sites $s : (\mathfrak{X}_\eta)_{\text{ét}} \rightarrow (\mathcal{X}_\eta)_{\text{ét}}$ faisant partie du diagramme suivant (qui ne commute pas nécessairement)

$$\begin{array}{ccc} (\mathfrak{X}_\eta)_{\text{ét}} & \xrightarrow{s} & (\mathcal{X}_\eta)_{\text{ét}} \\ \downarrow \lambda & & \downarrow j \\ \mathfrak{X}_{\text{ét}} \simeq (\mathfrak{X}_s)_{\text{ét}} & \xrightarrow{i} & \mathcal{X}_{\text{ét}} \end{array}$$

Pour tout anneau de coefficients commutatif E , on dispose d'une transformation naturelle $\lambda^* i^* \rightarrow s^* j^*$ (avec $i : \mathcal{X}_s \rightarrow \mathcal{X}$ et $j : \mathcal{X}_\eta \rightarrow \mathcal{X}$) qui induit une transformation naturelle de foncteurs de $D_{\text{ét}}^+(\mathcal{X}_\eta, E)$ à $D_{\text{ét}}^+(\mathfrak{X}_s, E)$

$$i^* R j_* \rightarrow R \lambda_* s^*$$

qui est un isomorphisme lorsque E est de torsion [31, Theorem 3.5.13]; en particulier, on obtient une comparaison entre les *cycles proches formels-rigides* $R \lambda_*(s^* \mathcal{F})$ et les cycles proches usuels $i^* R j_* \mathcal{F}$.

On a $R \Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{X}_s, R \lambda_*(s^* \mathcal{F})) = R \Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{X}_\eta, s^* \mathcal{F})$ pour $\mathcal{F} \in \mathcal{D}_{\text{ét}}^+(\mathcal{X}_\eta, E)$.

1.2.3. Filtration de Bloch-Kato-Hyodo. Soit $r \geq 1$ un entier. Définissons d'abord les symboles cohomologiques pour étudier les cycles proches $i^* R^q j_* \mu_{p^r}^{\otimes q}$.

Soit $\mathfrak{X}$ un schéma formel semi-stable sur $\mathcal{O}_K$. Munissons $\mathfrak{X}$ de la log-structure dite *canonique* induite par la fibre spéciale [4, Theorem 2.3.1], et notons $M_{\mathfrak{X}}$ le faisceau en monoïdes associé sur $\mathfrak{X}$. On a $M_{\mathfrak{X}}^{\text{gp}}(\mathfrak{U}) = \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_\eta}(\mathfrak{U}_\eta)^*$ pour tout $\mathfrak{U} \in \mathfrak{X}_{\text{ét}}$. La théorie de Kummer fournit une flèche

$$M_{\mathfrak{X}}^{\text{gp}} \simeq \lambda_* \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_\eta}^* \rightarrow R^1 \lambda_* \mu_{p^r}$$

puis par le cup-produit le symbole cohomologique

$$(M_{\mathfrak{X}}^{\text{gp}})^{\otimes q} \rightarrow R^q \lambda_* \mu_{p^r}^{\otimes q}$$

pour tout $q \geq 0$.

Supposons que $\mathfrak{X} = \mathcal{X}_p^\wedge$ soit le schéma formel complété p -adique d'un schéma algébrique $\mathcal{X}$ semi-stable sur $\mathcal{O}_K$. En procédant comme précédemment avec un $\mathcal{X}$ à la place de $\mathfrak{X}$, on obtient le symbole cohomologique

$$(i^* M_X^{\text{gp}})^{\otimes q} \rightarrow i^* R^q j_* \mu_{p^r}^{\otimes q}$$

pour tout $q \geq 0$; voir [57, (3.2.3)].

Introduisons maintenant la filtration de Bloch-Kato-Hyodo. Soit ϖ une uniformisante de K et posons $e' := \frac{ep}{p-1}$, où e est l'indice de ramification absolu de K .

Dans le cas d'un schéma $\mathcal{X}$ semi-stable sur $\mathcal{O}_K$, la filtration de ramification $1 + \varpi^m \mathcal{O}_{\mathcal{X}} \subset j_* \mathcal{O}_{\mathcal{X}_\eta}^*$ induit une filtration sur $M_{\mathcal{X}}^{\text{gp}}$ et puis par application de symboles une filtration décroissante

$$i^* R^q j_* \mu_{p^r}^{\otimes q} \supset U_{\mathcal{X}}^0 \supset V_{\mathcal{X}}^0 \supset U_{\mathcal{X}}^1 \supset V_{\mathcal{X}}^1 \supset \dots$$

sur les cycles proches $i^* R^q j_* \mu_{p^r}^{\otimes q}$ [57, au-dessus de Theorem 3.3.1].

On procède de même sur $\mathfrak{X}$ en utilisant l'inclusion $1 + \varpi^m \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \lambda_* \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_\eta}^*$ donné par $1 + \varpi^m \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{U}) \rightarrow \lambda_* \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_\eta}^*(\mathfrak{U}) = \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_\eta}^*(\mathfrak{U}_\eta)$ sur les $\mathfrak{U} \in \mathfrak{X}_{\text{ét}}$. Ainsi, on obtient une filtration par symboles

$$R^q \lambda_* \mu_{p^r}^{\otimes q} \supset U_{\mathfrak{X}}^0 \supset V_{\mathfrak{X}}^0 \supset U_{\mathfrak{X}}^1 \supset V_{\mathfrak{X}}^1 \supset \dots$$

dans la catégorie des faisceaux sur $\mathfrak{X}_{\text{ét}}$.

Pour $\mathfrak{X} = \mathcal{X}_p^\wedge$, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc} i^*(1 + \varpi^m \mathcal{O}_{\mathcal{X}}) & \longrightarrow & (i^* M_{\mathcal{X}}^{\text{gp}})^{\otimes q} & \longrightarrow & i^* R^q j_* \mu_{p^r}^{\otimes q} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 + \varpi^m \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} & \longrightarrow & (M_{\mathfrak{X}}^{\text{gp}})^{\otimes q} & \longrightarrow & R^q \lambda_* \mu_{p^r}^{\otimes q} \end{array}$$

des faisceaux sur $\mathfrak{X}_{\text{ét}} \simeq (\mathcal{X}_s)_{\text{ét}}$, où la flèche verticale du milieu est induite par

$$M_{\mathcal{X}}(\mathcal{U}) \rightarrow (i_* M_{\mathfrak{X}})(\mathcal{U}) = M_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{U})$$

sur les $\mathcal{U} \in \mathcal{X}_{\text{ét}}$, le schéma formel $\mathfrak{U}$ étant le relèvement de $\mathcal{U}_s$, ou encore le complété formel de $\mathcal{U}$. Donc la comparaison entre les cycles proches usuels et rigides est compatible avec les filtrations définies ci-dessus.

1.2.4. Les gradués de la filtration de Bloch-Kato-Hyodo admettent une description en termes de faisceaux de différentielles sur la fibre spéciales [8, 32]. Nous ne présentons ce résultat que dans le cas $r = 1$ où tous les gradués sont explicites. Nous renvoyons le lecteur à [32, Theorem (1.6)] pour l'énoncé général.

Soit $\mathcal{X}$ un schéma semi-stable sur $\mathcal{O}_K$. On munit sa fibre spéciale $Y := \mathcal{X}_s$ de la log-structure M_Y induite de la log-structure *canonique*¹ sur $\mathcal{X}$. Soit $\omega_{Y/k}^1$ le faisceau des différentielles logarithmiques sur Y relativement à la log-structure sur k induite par $\mathbf{N} \rightarrow k$, $1 \mapsto 0$. Le faisceau $\omega_{Y/k}^1$ est un $\mathcal{O}_Y$ -module localement libre de rang $\dim Y$; en effet, si $\mathcal{X}$ est de la forme standard $\text{Spec}(\mathcal{O}_K[X_0, \dots, X_n]/(X_0 \cdots X_r - \varpi))$, alors $\omega_{Y/k}^1$ est un $\mathcal{O}_Y$ -module libre engendré par $d\log X_i$, $i = 1, \dots, r$ et dX_i , $i = r+1, \dots, n$. Posons alors

$$\omega_{Y/k}^q := \wedge^q \omega_{Y/k}^1, \quad B_{Y/k}^q := \text{im}(d: \omega_{Y/k}^{q-1} \rightarrow \omega_{Y/k}^q), \quad Z_{Y/k}^q := \ker(d: \omega_{Y/k}^q \rightarrow \omega_{Y/k}^{q+1}), \quad q \in \mathbf{N}.$$

Notons $\omega_{Y/k, \log}^q$ le sous-faisceau abélien de $\omega_{Y/k}^q$ localement engendré par $\wedge_{i=1}^q d\log \overline{m}_i$ pour $m_i \in M_Y$.

Théorème (Bloch-Kato-Hyodo, [32, Corollary (1.7)], [57, Theorem 3.3.1]). *Soit $\mathcal{X}$ un schéma semi-stable sur $\mathcal{O}_K$. Les gradués de la filtration de Bloch-Kato-Hyodo sur $i^* R^q j_* \mu_p^{\otimes q}$ sont décrits comme suit (avec $Y := \mathcal{X}_s$) :*

- (i) On a $i^* R^q j_* \mu_p^{\otimes q} = U^0$.
- (ii) On a des isomorphismes

$$\text{gr}_0^0 := U^0/V^0 \simeq \omega_{Y/k, \log}^q, \quad \text{gr}_1^0 := V^0/U^1 \simeq \omega_{Y/k, \log}^{q-1}$$

induits respectivement par

$$\{a_1, \dots, a_q\} \mapsto \wedge_{i=1}^q d\log \overline{a}_i, \quad \{a_1, \dots, a_{q-1}, \varpi\} \mapsto \wedge_{i=1}^{q-1} d\log \overline{a}_i.$$

- (iii) Si $0 < m < e'$ et $p \nmid m$, on a des isomorphismes

$$\text{gr}_0^m := U^m/V^m \simeq \omega_{Y/k}^{q-1}/B_{Y/k}^{q-1}, \quad \text{gr}_1^m := V^m/U^{m+1} \simeq \omega_{Y/k}^{q-2}/Z_{Y/k}^{q-2}$$

induits respectivement par

$$\{1 + \varpi^m x, a_1, \dots, a_{q-1}\} \mapsto \overline{x} \cdot \wedge_{i=1}^{q-1} d\log \overline{a}_i, \quad \{1 + \varpi^m x, a_1, \dots, a_{q-2}, \varpi\} \mapsto \overline{x} \cdot \wedge_{i=1}^{q-2} d\log \overline{a}_i^2.$$

- (iv) Si $0 < m < e'$ et $p \mid m$, on a des isomorphismes

$$\text{gr}_0^m := U^m/V^m \simeq \omega_{Y/k}^{q-1}/Z_{Y/k}^{q-1}, \quad \text{gr}_1^m := V^m/U^{m+1} \simeq \omega_{Y/k}^{q-2}/Z_{Y/k}^{q-2}$$

induits respectivement par

$$\{1 + \varpi^m x, a_1, \dots, a_{q-1}\} \mapsto \overline{x} \cdot \wedge_{i=1}^{q-1} d\log \overline{a}_i, \quad \{1 + \varpi^m x, a_1, \dots, a_{q-2}, \varpi\} \mapsto \overline{x} \cdot \wedge_{i=1}^{q-2} d\log \overline{a}_i^2.$$

1. C'est la log-structure induite par la fibre spéciale [33, Exemples (3.7, 2), Exemples (1.5, 1)].

2. Ces applications dans le sens inverse, ainsi que celles dans le (iv), sont définies dans [32, après Lemma (2.2)], avec l'usage de [8, Lemma (4.1), Lemma (4.2)].

(v) Si $m \geq e'$, on a $U^m = 0$.

1.2.5 - Corollaire ([14, théorème 2.4]). Soit $\mathfrak{X}$ un schéma formel semi-stable sur $\mathcal{O}_K$. Les gradués de la filtration de Bloch-Kato-Hyodo de $R^q \lambda_* \mu_p^{\otimes q}$ admettent une identification de la même forme que celle donnée par (1.2.4, i-v).

Démonstration. La question étant locale pour la topologie étale sur $\mathfrak{X}$, on peut supposer que $\mathfrak{X}$ est un schéma formel semi-stable standard, de sorte que $\mathfrak{X} = \mathcal{X}_p^\wedge$ pour un schéma algébrique semi-stable standard $\mathcal{X}$. Le corollaire se déduit alors de la comparaison entre les cycles proches usuels et rigides

$$i^* Rj_* \mu_p^{\otimes q} \xrightarrow{\sim} R\lambda_*(s^* \mu_p^{\otimes q}) \simeq R\lambda_* \mu_p^{\otimes q},$$

compte tenu de sa compatibilité (selon les définitions) avec les filtrations par symboles et les identifications explicites dans l'énoncé du théorème précédent. $\square$

1.2.6 - Remarque. Les différentielles $d: \omega_{Y/k}^q \rightarrow \omega_{Y/k}^{q+1}$ n'étant pas $\mathcal{O}_Y$ -linéaires pour leurs structures naturelles de $\mathcal{O}_Y$ -modules, les faisceaux abéliens $\omega_{Y/k}^q/B_{Y/k}^q$ et $\omega_{Y/k}^q/Z_{Y/k}^q$ n'héritent pas de structure de $\mathcal{O}_Y$ -modules. Cependant, le schéma Y étant en égale caractéristique p , si l'on munit les $\omega_{Y/k}^q$ des structures de $\mathcal{O}_Y$ -modules via le Frobenius $F = (-)^p := \mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_Y$ ³, les différentielles d deviennent $\mathcal{O}_Y$ -linéaires, et alors les $\omega_{Y/k}^q/B_{Y/k}^q$ et les $\omega_{Y/k}^q/Z_{Y/k}^q$ sont naturellement des $\mathcal{O}_Y$ -modules cohérents.

2 Conséquences de la conjecture

Bien que la conjecture (0.6) soit formulée pour les affinoïdes rigides, nous allons voir qu'elle admet des conséquences pour les espaces rigides quasi-compacts séparés (cf. lemme (2.1.5)) et pour les espaces rigides partiellement propres (cf. corollaire (2.1.7)). En plus, par des techniques dues à Hansen, nous pouvons étendre la conjecture au cas des coefficients Zariski-constructibles (cf. proposition (2.2.6)). Une application aux tours de Drinfeld en niveau fini sera donnée à la fin de cette section.

2.1 Profinitude pour les espaces rigides partiellement propres

2.1.1 - Définition (Inclusion stricte). Soit $U \subset X$ une inclusion d'un ouvert admissible dans un espace rigide.

- (i) Lorsque $X = \mathrm{Sp}(R)$ et U est un ouvert affinoïde, on dit que l'inclusion est stricte s'il existe $r \in \mathbb{Q} \cap]0, 1[$ et une présentation $R = K\langle T_1, \dots, T_m \rangle / J$ tel que l'inclusion se factorise comme $U \subset X(r) := \mathrm{Sp}(R_r) := X(\frac{T_1}{p^r}, \dots, \frac{T_m}{p^r}) \subset X$ dont la seconde inclusion est induite par le morphisme naturel

$$R = K\langle T_1, \dots, T_m \rangle / J \rightarrow K\langle T_1, \dots, T_m, S_1, \dots, S_m \rangle / (J, T_1^{r_2} - p^{r_1} S_1, \dots, T_m^{r_2} - p^{r_1} S_m) = R_r,$$

où $r = \frac{r_1}{r_2}$ avec $r_1, r_2 \in \mathbb{N}$. On écrira $U \subset^\dagger X$. L'affinoïde $X(r)$ dépend du choix de la présentation de R .

- (ii) Lorsque U est un ouvert affinoïde admissible, on dit que l'inclusion est stricte si elle se raffine comme $U \subset^\dagger V \subset X$ pour un ouvert affinoïde admissible V de X . On écrira $U \subset^\dagger X$.
- (iii) Lorsque X est séparé et U est un ouvert admissible quasi-compact, on dit que l'inclusion est stricte s'il existe un recouvrement admissible affinoïde fini $\{U_i\}_{i \in I}$ de U tels que $U_i \subset^\dagger X$. On écrira $U \subset^\dagger X$.

2.1.2 - Définition ([25, 2.24]). Soit X un espace rigide sur un corps non archimédien complet K .

- (i) On dit que X est *partiellement propre* s'il est séparé et s'il admet un recouvrement admissible affinoïde dénombrable $\{U_i\}_{i \in I}$ tel que pour tout $i \in I$, il existe un ouvert affinoïde admissible $\tilde{U}_i$ de X tel que $U_i \subset^\dagger \tilde{U}_i$.
- (ii) On dit que X est *Stein* s'il admet un *recouvrement Stein*, c'est-à-dire un recouvrement admissible affinoïde $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tel que $U_i \subset^\dagger U_{i+1}$.

3. Plus précisément, on a

$$f \cdot (x \cdot \wedge_{i=1}^q \mathrm{dlog} a_i) = f^p x \cdot \wedge_{i=1}^q \mathrm{dlog} a_i$$

pour les sections locales $f, x \in \mathcal{O}_Y$ et les sections locales $a_i \in \mathcal{O}_Y^\times$ pour $i = 1, \dots, q$.

On dit aussi que X est *propre* s'il est partiellement propre et quasi-compact.

Tout espace rigide Stein sur K est partiellement propre (donc en particulier séparé).

2.1.3 - Exemple. Soit $X = \text{Sp}(R)$ un espace rigide affinoïde sur K muni d'une présentation $R = K\langle T_1, \dots, T_m \rangle / J$, son intérieur associé $X^\circ := \bigcup_{\delta \in \mathbf{Q} \cap]0,1[} X(\delta)$ (qui dépend du choix de la présentation) est un espace rigide Stein sur K de recouvrement Stein $\{X(1 - \frac{1}{p^n})\}_{n \in \mathbf{N}}$.

2.1.4 - Lemme. Soit X un espace rigide sur un corps non archimédien complet K . Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) X est partiellement propre ;
- (ii) X est séparé, admet un recouvrement ouvert admissible dénombrable par des quasi-compacts, et est localement Stein (c'est-à-dire que tout $x \in X$ possède un voisinage ouvert admissible U_x qui est Stein) ;
- (iii) X admet un recouvrement admissible $\{U_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ tel que les U_n sont quasi-compacts séparés et que $U_n \subset^\dagger U_{n+1}$.

Démonstration. L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) est claire vu l'exemple (2.1.3). Et l'implication (iii) $\Rightarrow$ (i) résulte aussitôt de la définition (2.1.1, iii). Montrons la direction (ii) $\Rightarrow$ (iii). Pour tout $x \in X$, choisissons un recouvrement Stein $\{U_{x,n}\}_{n \in \mathbf{N}}$ de U_x ; on a $U_{x,n} \subset^\dagger U_{x,n+1}$. Par hypothèse, il existe un recouvrement ouvert admissible dénombrable $\{X_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ par des quasi-compacts X_i . On peut alors construire un sous-ensemble dénombrable $E = \{x_m\}_{m \in \mathbf{N}} \subset X$ tel que $\{U_{x_m,n}\}_{m \in \mathbf{N}, n \in \mathbf{N}}$ forme un recouvrement admissible de X , puisque pour chaque quasi-compact X_i , il existe un nombre fini de points $x \in X$ et un $N \in \mathbf{N}$ tels que les $U_{x,N}$ couvrent X_i . Les ouverts affinoïdes admissibles

$$U_n = \bigcup_{1 \leq m \leq n} U_{x_m,n}, \quad n \in \mathbf{N}$$

conviendront pour (iii). □

2.1.5 - Lemme. Soit $U \subset^\dagger X$ une inclusion stricte d'un ouvert admissible quasi-compact dans un espace rigide séparé de dimension d sur K . Supposons que la conjecture (0.6) soit vraie en dimension d . Alors pour tous $n, m \in \mathbf{N}$, les applications induites $H_{\text{ét}}^n(X, \mathbf{Z}/p^m) \rightarrow H_{\text{ét}}^n(U, \mathbf{Z}/p^m)$ et $H_{\text{ét},c}^n(U, \mathbf{Z}/p^m) \rightarrow H_{\text{ét},c}^n(X, \mathbf{Z}/p^m)$ sont d'image finie.

Démonstration. Montrons par récurrence sur l'entier $r \geq 1$ que

($\star_r$) L'énoncé est vrai pour toute inclusion stricte $U \subset^\dagger X$ telle qu'il existe $\{U_\alpha\}_{1 \leq \alpha \leq r}$ un recouvrement affinoïde fini de U et $\{V_\alpha\}_{1 \leq \alpha \leq r}$ une famille d'ouverts affinoïdes admissibles de X tels que $U_\alpha \subset^\dagger V_\alpha$ pour tout α .

La conjecture (0.6) dit que ($\star_1$) est vrai. Supposons maintenant que ($\star_r$) soit vrai, et supposons l'existence de $\{U_\alpha\}_{1 \leq \alpha \leq r+1}$ un recouvrement affinoïde fini de U et de $\{V_\alpha\}_{1 \leq \alpha \leq r+1}$ une famille d'ouverts affinoïdes admissibles de X tels que $U_\alpha \subset^\dagger V_\alpha$ pour tout α . Il existe $\delta \in \mathbf{Q} \cap]0,1[$ telle que $U_\alpha \subset^\dagger V_\alpha(\delta) \subset^\dagger V_\alpha$ pour tout α .

Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} H_{\text{ét}}^n(\bigcup_{1 \leq \alpha \leq r+1} V_\alpha, \mathbf{Z}/p^m) & \longrightarrow & H_{\text{ét}}^n(\bigcup_{1 \leq \alpha \leq r} V_\alpha, \mathbf{Z}/p^m) \oplus H_{\text{ét}}^n(V_{r+1}, \mathbf{Z}/p^m) & & \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ H_{\text{ét}}^{n-1}(\bigcup_{1 \leq \alpha \leq r} V_\alpha(\delta) \cap V_{r+1}(\delta), \mathbf{Z}/p^m) & \longrightarrow & H_{\text{ét}}^n(\bigcup_{1 \leq \alpha \leq r+1} V_\alpha(\delta), \mathbf{Z}/p^m) & \longrightarrow & H_{\text{ét}}^n(\bigcup_{1 \leq \alpha \leq r} V_\alpha(\delta), \mathbf{Z}/p^m) \oplus H_{\text{ét}}^n(V_{r+1}(\delta), \mathbf{Z}/p^m) \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ H_{\text{ét}}^{n-1}(\bigcup_{1 \leq \alpha \leq r} U_\alpha \cap U_{r+1}, \mathbf{Z}/p^m) & \longrightarrow & H_{\text{ét}}^n(\bigcup_{1 \leq \alpha \leq r+1} U_\alpha, \mathbf{Z}/p^m) & & \end{array}$$

resp.

$$\begin{array}{ccccc} H_{\text{ét},c}^n(\bigcup_{1 \leq \alpha \leq r+1} V_\alpha, \mathbf{Z}/p^m) & \longrightarrow & H_{\text{ét},c}^{n+1}(\bigcup_{1 \leq \alpha \leq r} V_\alpha \cap V_{r+1}, \mathbf{Z}/p^m) & & \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ H_{\text{ét},c}^n(\bigcup_{1 \leq \alpha \leq r} V_\alpha(\delta), \mathbf{Z}/p^m) \oplus H_{\text{ét},c}^n(V_{r+1}(\delta), \mathbf{Z}/p^m) & \longrightarrow & H_{\text{ét},c}^n(\bigcup_{1 \leq \alpha \leq r+1} V_\alpha(\delta), \mathbf{Z}/p^m) & \longrightarrow & H_{\text{ét},c}^{n+1}(\bigcup_{1 \leq \alpha \leq r} V_\alpha(\delta) \cap V_{r+1}(\delta), \mathbf{Z}/p^m) \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ H_{\text{ét},c}^n(\bigcup_{1 \leq \alpha \leq r} U_\alpha, \mathbf{Z}/p^m) \oplus H_{\text{ét},c}^n(U_{r+1}, \mathbf{Z}/p^m) & \longrightarrow & H_{\text{ét},c}^n(\bigcup_{1 \leq \alpha \leq r+1} U_\alpha, \mathbf{Z}/p^m) & & \end{array}$$

donné par la suite exacte longue de Mayer-Vietoris pour la cohomologie étale resp. pour la cohomologie étale

à support compact⁴. Comme X est séparé, les $U_\alpha \cap U_{r+1}$, $V_\alpha(\delta) \cap V_{r+1}(\delta)$ et $V_\alpha \cap V_{r+1}$ pour $1 \leq \alpha \leq r$ sont affinoïdes rigides, et on a $U_\alpha \cap U_{r+1} \subset^\dagger V_\alpha(\delta) \cap V_{r+1}(\delta) \subset^\dagger V_\alpha \cap V_{r+1}$. Par hypothèse de récurrence $(\star_r)$, les flèches verticales des deux côtés sont d'image finie ; donc le sont aussi les composées des flèches verticales du milieu par (1.1.4), autrement dit, $(\star_{r+1})$ est vrai. $\square$

2.1.6. Structure condensée sur la cohomologie étale. Pour tout espace rigide X sur K , nous disposons du morphisme de sites $\nu_X : X_{\text{proét}} := X_{\text{qproét}}^\circ \rightarrow X_{\text{ét}}$ vérifiant que le foncteur $\nu_X^* : X_{\text{ét}}^\sim \rightarrow X_{\text{proét}}^\sim$ est pleinement fidèle [49, Proposition 14.8]. Alors, pour tout faisceau étale $\mathcal{F}$ sur X , on peut voir $R\Gamma_{\text{ét}}(X, \mathcal{F}) \simeq R\Gamma_{\text{qproét}}(X^\circ, \nu_X^* \mathcal{F})$ comme l'objet sous-jacent à un *complexe (dérivé) condensé*, c'est-à-dire à un objet de $\mathcal{D}(\text{CondAb})$, la catégorie dérivée des complexes de groupes abéliens condensés, au sens de [12]. Plus précisément, suivant les idées dans [11], on définit la *cohomologie étale condensée* comme

$$\underline{R\Gamma}_{\text{ét}}(X, \mathcal{F}) = Rf_{\text{proét},*} \nu_X^* \mathcal{F} \in \mathcal{D}(\text{CondAb})$$

où $f_{\text{proét}} : X_{\text{proét}} \rightarrow *_{\text{proét}}$ est le morphisme de sites induit par le foncteur $X^\circ \times S \hookrightarrow S$ et on a identifié la catégorie $\text{Ab}(*_{\text{proét}})$ des faisceaux pro-étales de groupes abéliens sur un point à la catégorie des groupes abéliens condensée CondAb ; autrement dit, pour tout ensemble profini S , on a

$$\underline{R\Gamma}_{\text{ét}}(X, \mathcal{F})(S) \simeq R\Gamma_{\text{qproét}}(X^\circ \times S, \nu_X^* \mathcal{F}).$$

2.1.6.1. Si X est quasi-compact, alors [49, Proposition 11.23, Proposition 14.9]

$$R\Gamma_{\text{qproét}}(X^\circ \times S, \nu_X^* \mathcal{F}) \simeq \varinjlim_i R\Gamma_{\text{qproét}}(X^\circ \times S_i, \nu_X^* \mathcal{F}) \simeq \varinjlim_i \text{Hom}_{\text{Set}}(S_i, R\Gamma_{\text{qproét}}(X^\circ, \nu_X^* \mathcal{F}))$$

où $S \simeq \varprojlim_i S_i$ est une représentation profinie. On munit $R\Gamma_{\text{qproét}}(X^\circ, \nu_X^* \mathcal{F}) \simeq \underline{R\Gamma}_{\text{ét}}(X, \mathcal{F})$ de la structure condensée *discrète*, et le note $\underline{R\Gamma}_{\text{ét}}(X, \mathcal{F})$; cela veut dire que

$$\underline{R\Gamma}_{\text{ét}}(X, \mathcal{F})(S) = \varinjlim_i \left(\prod_{S_i} R\Gamma_{\text{ét}}(X, \mathcal{F}) \right) \in \mathcal{D}(\text{Ab}).$$

Ainsi, on a une identification

$$\underline{R\Gamma}_{\text{ét}}(X, \mathcal{F}) \simeq \underline{R\Gamma}_{\text{ét}}(X, \mathcal{F}).$$

En prenant leurs groupes de cohomologie, on obtient un isomorphisme de groupes abéliens condensés

$$\underline{H}_{\text{ét}}^i(X, \mathcal{F}) \simeq \underline{H}_{\text{ét}}^i(X, \mathcal{F}),$$

où le groupe abélien $H_{\text{ét}}^i(X, \mathcal{F})$ est muni de la topologie discrète.

2.1.6.2. Si X est la réunion d'une suite croissante d'ouverts quasi-compacts $\{U_i\}_{i \in \mathbf{N}}$, alors

$$\underline{R\Gamma}_{\text{ét}}(X, \mathcal{F})(S) \simeq R\Gamma_{\text{qproét}}(X^\circ \times S, \nu_X^* \mathcal{F}) \simeq R \lim_i R\Gamma_{\text{qproét}}(U_i^\circ \times S, \nu_X^* \mathcal{F}) \simeq R \lim_i \underline{R\Gamma}_{\text{ét}}(U_i, \nu_X^* \mathcal{F})(S).$$

Ainsi, le complexe condensé $\underline{R\Gamma}_{\text{ét}}(X, \mathcal{F}) \simeq R \lim_i \underline{R\Gamma}_{\text{ét}}(U_i, \nu_X^* \mathcal{F})$ est une limite dérivée de complexes condensés discrets. Or, le topos $\text{Ab}(*_{\text{proét}}) \simeq \text{CondAb}$ étant replet [11, Corollary 2.4], les $R^j \lim_{i \in \mathbf{N}}$ s'annulent pour $j \geq 2$ pour tout système inverse de groupes abéliens condensés indexé par $\mathbf{N}$ [7, Proposition 3.1.11], d'où une suite exacte courte

$$0 \rightarrow R^1 \lim_i H^{n-1}(M_i) \rightarrow H^n(R \lim_i M_i) \rightarrow \lim_i H^n(M_i) \rightarrow 0$$

pour tout système inverse $\{M_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ dans $\mathcal{D}(\text{CondAb})$. En particulier, on obtient pour tout $n \in \mathbf{N}$ la suite exacte de groupes abéliens condensés

$$(2.1.6.3) \quad 0 \rightarrow R^1 \lim_i \underline{H}_{\text{ét}}^{n-1}(U_i, \mathcal{F}) \rightarrow \underline{H}_{\text{ét}}^n(X, \mathcal{F}) \rightarrow \varinjlim_i \underline{H}_{\text{ét}}^n(U_i, \mathcal{F}) \rightarrow 0,$$

4. Pour un faisceau $\mathcal{F}$ de groupes abéliens sur $X_{\text{ét}}$ et des ouverts U et V de X , on a la suite exacte courte des faisceaux

$$0 \rightarrow j_{U \cap V!} \mathcal{F}|_{U \cap V} \rightarrow j_{U!} \mathcal{F}_U \oplus j_{V!} \mathcal{F}_V \xrightarrow{(s,t) \mapsto s-t} j_{U \cup V!} \mathcal{F}_{U \cup V} \rightarrow 0.$$

On en prend ensuite la suite exacte longue de groupes de cohomologie étale à support compact.

où le groupe $\lim_i H_{\text{ét}}^n(U_i, \mathcal{F})$ muni de la topologie pro-discrète. Enfin, si les applications $H_{\text{ét}}^n(U_{i+1}, \mathcal{F}) \rightarrow H_{\text{ét}}^n(U_i, \mathcal{F})$ sont d'image finie, le système $\{H_{\text{ét}}^n(U_i, \mathcal{F})\}_{i \in \mathbb{N}}$ est Mittag-Leffler, alors on aura $R^1 \lim_i \underline{H_{\text{ét}}^n(U_i, \mathcal{F})} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ [7, Proposition 3.1.10], ce qui assure que

$$\underline{H_{\text{ét}}^n(X, \mathcal{F})} \simeq \underline{\lim_i H_{\text{ét}}^n(U_i, \mathcal{F})},$$

qui provient d'un groupe profini.

2.1.7 - Corollaire. *Soit X un espace rigide partiellement propre de dimension d sur K . Supposons que la conjecture (0.6) soit vraie en dimension d . Alors pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, le groupe abélien condensé $\underline{H_{\text{ét}}^n(X, \mathbb{Z}/p^m)}$ provient d'un groupe profini; plus précisément, pour tout système d'ouverts admissibles quasi-compacts $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tel que $U_i \subset^\dagger U_{i+1}$ et que $X = \bigcup_i U_i$, on a*

$$\underline{H_{\text{ét}}^n(X, \mathbb{Z}/p^m)} \xrightarrow{\sim} \underline{\lim_i H_{\text{ét}}^n(U_i, \mathbb{Z}/p^m)},$$

et que $\lim_i H_{\text{ét}}^n(U_i, \mathbb{Z}/p^m)$, muni de la topologie pro-discrète, est profini.

Démonstration. L'existence de tel système $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ est assurée dans (2.1.4, iii). Soit $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ un tel système. Pour tout faisceau de groupes abéliens $\mathcal{F}$ sur $X_{\text{ét}}$, on dispose de la suite exacte (2.1.6.3). Si la conjecture (0.6) est vraie en dimension d , alors les applications $H_{\text{ét}}^n(U_{i+1}, \mathbb{Z}/p^m) \rightarrow H_{\text{ét}}^n(U_i, \mathbb{Z}/p^m)$ sont d'image finie quel que soit $i \in \mathbb{N}$, d'où la conclusion par (2.1.6.2). $\square$

2.2 Profinitude pour les coefficients Zariski-constructibles

2.2.1 - Définition (Faisceaux Zariski-constructibles). Soit X un espace rigide sur un corps non archimédien complet K . Fixons un anneau de coefficients Λ noethérien. Un *faisceau de Λ -modules Zariski-constructible* est un faisceau $\mathcal{F}$ sur $X_{\text{ét}}$ tel qu'il existe une décomposition de X en réunion disjointe localement finie de sous-espaces $Z_i, i \in I$ localement fermés pour la topologie de Zariski sur X telle que les restrictions $\mathcal{F}|_{Z_i, \text{ét}}, i \in I$ sont des faisceaux localement constants de type fini⁵. Notons $\text{Shv}_{\text{zc}}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ la sous-catégorie pleine de la catégorie $\text{Shv}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ formée de tous les faisceaux de Λ -modules Zariski-constructibles.

2.2.2. Désingularisation pour les espaces rigides en caractéristique 0. Soit X un espace rigide affinoïde *génériquement réduit* (c'est-à-dire dont le lieu réduit est un ouvert de Zariski dense) sur un corps non archimédien complet K . Le lieu singulier X_{sing} est alors un sous-espace fermé de Zariski nulle part dense dans X . En particulier, X est excellent au sens de [20] : toute K -algèbre affinoïde est un anneau excellent par *op. cit.*, théorème 2.13 (cf. [44, Theorem 102]).

Supposon que K soit de caractéristique 0. Soit $Z \subset X$ un sous-espace fermé de Zariski nulle part dense. D'après les théorèmes de désingularisation de Temkin pour les espaces rigides [56, Theorem 1.1.13], il existe une séquence finie d'éclatements chacun le long d'un sous-espace fermé de Zariski nulle part dense

$$g: X' = X_m \rightarrow \cdots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 = X$$

avec X' lisse et telle que g soit un isomorphisme en dehors de $X_{\text{sing}} \cup Z$. En particulier, g est un morphisme propre d'espaces rigides.

Si on écrit $X = \text{Sp}(A)$, alors Z est l'analytification d'un sous-schéma fermé $Z^{\text{alg}} \subset X^{\text{alg}} = \text{Spec}(A)$, et la séquence d'éclatements provient de l'analytification relative [36, §1] (réinterprétée dans [16, Example 2.11]) d'une séquence analogue sur X^{alg} [56, Theorem 1.1.11]

$$g^{\text{alg}}: X'^{\text{alg}} = X_m^{\text{alg}} \rightarrow \cdots \rightarrow X_1^{\text{alg}} \rightarrow X_0^{\text{alg}} = X^{\text{alg}}$$

avec X'^{alg} régulier⁶, telle que l'image réciproque réduite $g^{\text{alg}-1}(Z^{\text{alg}})_{\text{red}}$ soit un diviseur à croisements normaux strict dans X'^{alg} , et que g^{alg} soit un isomorphisme en dehors de $X_{\text{sing}}^{\text{alg}} \cup Z^{\text{alg}}$. D'après la GAGA rigide relative [16, Appendix, (A.1.1)],

$$g_* \mathcal{O}_{X'} \simeq (g_*^{\text{alg}} \mathcal{O}_{X'^{\text{alg}}})^{\text{an}}$$

qui est un $\mathcal{O}_X$ -module cohérent, et isomorphe à $\mathcal{O}_{X^{\text{alg}}}^{\text{an}} = \mathcal{O}_X$ si X^{alg} est normal.

2.2.3 - Lemme (cf. [52, Lemma 0A3R]). *Soit X un espace rigide affinoïde sur un corps non archimédien complet K . Soient l un nombre premier et $\mathcal{F}$ un faisceau de $\mathbf{F}_l$ -modules localement constant fini sur $X_{\text{ét}}$. Alors il existe un revêtement fini étale $f: Y \rightarrow X$ de degré premier à l sur chaque composante connexe de X tel que $f^*\mathcal{F}$ est une extension successive de faisceaux constants $\mathbf{F}_l$.*

Démonstration. Soit $X_0 \subset X$ une composante connexe; c'est un sous-espace fermé de X . Comme X est localement connexe, X_0 est un ouvert dans X . Soit $\bar{x}_0$ un point géométrique de $X_0 = \text{Sp}(A)$.

Par la théorie de Galois pour X_0 , le faisceau localement constant $\mathcal{F}$ correspond à une représentation du groupe profini $\pi_1^{\text{alg}}(X_0, \bar{x}_0)$ (voir [1, §3.2] pour la définition; il est identifié au groupe fondamental $\pi_1^{\text{ét}}(\text{Spec}(A), \bar{x}_0)$ du schéma $\text{Spec}(A)$ par [31, Example 1.6.6, ii]) sur un $\mathbf{F}_l$ -espace vectoriel V de dimension finie. Soit $G := \text{im}(\pi_1^{\text{alg}}(X_0, \bar{x}_0) \rightarrow \text{GL}_{\mathbf{F}_l}(V))$, qui correspond à un revêtement fini étale Y de X_0 , galoisien de groupe de Galois G . Soit H un l -sous-groupe de Sylow de G . La représentation de H sur V admet une filtration dont les gradués sont des représentations de dimension 1 [50, chapitre 8, proposition 26]. Cette filtration correspond par le théorie de Galois à une filtration de $\mathcal{F}$ dont les gradués sont des faisceaux localement constants de rang 1 sur $\mathbf{F}_l$ trivialisé sur le revêtement fini étale Y/H de X_0 de degré $|G/H|$ premier à l par le choix de H . $\square$

2.2.4 - Proposition (Cas affinoïde et variante de [30, Theorem 1.6 ou Theorem 2.10]). *Soit $X = \text{Sp}(A)$ un affinoïde rigide sur un corps non archimédien complet K de caractéristique 0. Alors pour tout fermé de Zariski $Z \subset X$ nulle part dense et contenant X_{sing} ⁷, le foncteur restriction*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Morphismes } Y \rightarrow X \text{ finis surjectifs} \\ \text{qui sont étales sur } X \setminus Z \end{array} \right\} \rightarrow \{ \text{Morphismes } Y \rightarrow X \setminus Z \text{ finis étales surjectifs} \}$$

$$Y \mapsto Y \times_X (X \setminus Z)$$

est essentiellement surjectif.

2.2.5 - Remarque. Ce résultat a été essentiellement démontré dans la preuve de [30, Theorem 2.10], mais n'y est énoncé que pour les espaces rigides *normaux* pour pouvoir appliquer la pleine fidélité afin de se localiser au cas affinoïde. Néanmoins, la normalité apparaissait aussi tout à la fin de *loc. cit.* pour la pleine fidélité du foncteur $(-) \times_{X \setminus Z} (X \setminus Z)^{\text{sm}}$. Nous allons montrer que ceci pourrait être contourné si $Z \supset X_{\text{sing}}$.

Démonstration. Rappelons que le résultat est valable pour X lisse et $Z \subset X$ un diviseur à croisements normaux strict d'après [43] ou [30, Theorem 2.1]. On s'y réduira dans la suite.

Le fermé de Zariski Z est de la forme $\text{Sp}(B)$ où $B = A/I$ avec $I \subset A$ un idéal [31, (1.4.1) et (1.4.4)]. Notons $X^{\text{alg}} = \text{Spec}(A)$ et $Z^{\text{alg}} = \text{Spec}(B)$. D'après la désingularisation à la Temkin (2.2.2), il existe une séquence finie d'éclatements

$$g^{\text{alg}}: X'^{\text{alg}} = X_m^{\text{alg}} \rightarrow \dots \rightarrow X_1^{\text{alg}} \rightarrow X_0^{\text{alg}} = X^{\text{alg}} = \text{Spec}(A)$$

avec X'^{alg} régulier, telle que $g^{\text{alg}-1}(Z^{\text{alg}})_{\text{red}}$ soit un diviseur à croisements normaux strict dans X'^{alg} , et que g^{alg} soit un isomorphisme en dehors de $X_{\text{sing}}^{\text{alg}} \cup Z^{\text{alg}} = Z^{\text{alg}}$. On désigne leur analytification respective en relevant la décoration « alg ».

Posons $U := X \setminus Z$, $U' := g^{-1}(U)$ et $Z' := g^{-1}(Z)_{\text{red}}$. Alors par l'analytification, $Z' \subset X'$ est un diviseur à croisements normaux strict.

Soit $\phi: V \rightarrow U$ un morphisme fini étale. Notons $V' = V \times_X X'$. D'après ce qui précède, il existe un morphisme $\pi': Y' \rightarrow X'$ fini surjectif, étale sur $X' \setminus Z'$, tel que $Y' \times_{X'} U' = V'$. Nous disposons maintenant

6. Soit A une algèbre de type fini sur un affinoïde sur K . Si A est régulier et la caractéristique K est 0, alors A est géométriquement régulier [27, proposition (6.7.4)], donc l'espace rigide $\text{Sp}(A)$ est lisse [21, Theorem 5.3.4, (i)].

7. L'espace rigide X est nécessairement génériquement réduit si tel Z existe, car alors X_{sing} est nulle part dense.

du diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
 V' & \longrightarrow & Y' & & & & \\
 \downarrow g_V & \searrow \phi' & \downarrow \pi' & & & & \\
 & & U' & \xrightarrow{j'} & X' & \xleftarrow{i'} & Z' \\
 & & \downarrow g_U & & \downarrow g & & \downarrow g_Z \\
 & & U & \xrightarrow{j} & X & \xleftarrow{i} & Z \\
 & \searrow \phi & & & & &
 \end{array}$$

dont tous les parallélogrammes sont cartésiens.

Définissons

$$\mathcal{A} := g_* \pi'_* \mathcal{O}_{Y'}$$

et

$$Y := \text{Spec}_X(\mathcal{A}) \xrightarrow{\pi} X$$

le spectre affine relatif au-dessus de X . Comme g est propre, $\mathcal{A}$ est un $\mathcal{O}_X$ -module cohérent, donc π est un morphisme fini; de plus, on a

$$j^* \mathcal{A} = j^* g_* \pi'_* \mathcal{O}_{Y'} \simeq g_{U*} j'^* \pi'_* \mathcal{O}_{Y'} \simeq g_{U*} \phi'_* \mathcal{O}_{V'} \simeq \phi_* g_{V*} \mathcal{O}_{V'} \simeq \phi_* \mathcal{O}_V,$$

où l'on a utilisé la condition que g_U (donc aussi g_V) soit un isomorphisme. Donc,

$$\pi^{-1}(U) = \text{Spec}_U(j^* \mathcal{A}) \simeq \text{Spec}_U(\phi_* \mathcal{O}_V) \simeq V.$$

Pour conclure, le morphisme fini π est fermé, d'image contenant l'ouvert dense U , donc π est surjectif. $\square$

2.2.6 - Proposition. Soit $U \subset^\dagger X$ une inclusion stricte d'un ouvert admissible quasi-compact dans un espace rigide séparé de dimension d sur K . Supposons que la conjecture (0.6) soit vraie en dimension $\leq d$. Alors pour tous $n \in \mathbf{N}$ et $m \in \mathbf{N}^*$, les applications induites $H_{\text{ét}}^n(X, \mathcal{F}) \rightarrow H_{\text{ét}}^n(U, \mathcal{F}|_U)$ et $H_{\text{ét},c}^n(U, \mathcal{F}|_U) \rightarrow H_{\text{ét},c}^n(X, \mathcal{F})$ sont d'image finie pour tout faisceau de $\mathbf{Z}/m$ -modules Zariski-constructible $\mathcal{F}$ sur $X_{\text{ét}}$.

Démonstration. Par « dévissage », on entendra implicitement une application du lemme (1.1.4).

(i) Tout d'abord, en raisonnant par récurrence comme dans la preuve du lemme (2.1.5), on se ramène au cas où $X = \text{Sp}(A)$ est un affinoïde, et où $U \subset^\dagger X$ est une inclusion stricte d'affinoïdes rigides.

(ii) Ensuite, par récurrence sur m et par des dévissages du type

$$(2.2.6.1) \quad 0 \rightarrow \mathcal{F}[l] \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow l\mathcal{F} \rightarrow 0,$$

on se ramène au cas où $\mathcal{F}$ est un faisceau de $\mathbf{F}_l$ -modules pour certain nombre premier l . En effet, supposons que $m > 1$, et soit l un facteur premier de n tel que $m = lm'$ avec $m' > 1$. Par la définition de l'inclusion stricte d'affinoïdes rigides, on peut insérer un ouvert affinoïde $X(\delta)$ entre U et X tel que

$$U \subset^\dagger X(\delta) \subset^\dagger X.$$

Considérons les suites exactes horizontales compatibles

$$\begin{array}{ccccccc}
 \longrightarrow & H_{\text{ét}}^n(X, \mathcal{F}[l]) & \longrightarrow & H_{\text{ét}}^n(X, \mathcal{F}) & \longrightarrow & H_{\text{ét}}^n(X, l\mathcal{F}) & \longrightarrow \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 \longrightarrow & H_{\text{ét}}^n(X(\delta), \mathcal{F}[l]) & \longrightarrow & H_{\text{ét}}^n(X(\delta), \mathcal{F}) & \longrightarrow & H_{\text{ét}}^n(X(\delta), l\mathcal{F}) & \longrightarrow \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 \longrightarrow & H_{\text{ét}}^n(U, \mathcal{F}[l]) & \longrightarrow & H_{\text{ét}}^n(U, \mathcal{F}) & \longrightarrow & H_{\text{ét}}^n(U, l\mathcal{F}) & \longrightarrow
 \end{array}$$

Supposons que la proposition soit vraie pour l (resp. pour m') à la place de m . Alors l'application

$H_{\text{ét}}^n(X(\delta), \mathcal{F}[l]) \rightarrow H_{\text{ét}}^n(U, \mathcal{F}[l])$ (*resp.* l'application $H_{\text{ét}}^n(X, l\mathcal{F}) \rightarrow H_{\text{ét}}^n(X(\delta), l\mathcal{F})$) est d'image finie. En appliquant le lemme (1.1.4), on obtient que les applications $H_{\text{ét}}^n(X, \mathcal{F}) \rightarrow H_{\text{ét}}^n(U, \mathcal{F})$ sont d'image finie. Un argument similaire s'applique à la cohomologie à support compact.

(iii) En plus, on peut, en remplaçant X par X_{red} , supposer que X est réduit, ce qui n'affecte pas l'énoncé. En effet, le morphisme $X_{\text{red}} \rightarrow X$ étant un homéomorphisme universel, la catégorie des faisceaux Zariski-constructibles ainsi que les groupes de cohomologie en question reste inchangés par ce changement, en vertu de l'invariance topologique du topos étale [31, Remark 2.3.3] et de la construction de la cohomologie étale à support compact dans *op. cit.*, §5.

(iv) Par constructibilité et dévissage du type

$$0 \rightarrow j_! j^* \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow i_* i^* \mathcal{F} \rightarrow 0,$$

où $j: V \rightarrow X$ est l'inclusion d'un ouvert de Zariski dense et $i: Z \rightarrow X$ l'immersion fermée du complémentaire qui inclut X_{sing} , et par récurrence sur la dimension de X , on peut de plus se ramener au cas où $\mathcal{F} = j_! \mathcal{G}$ où $j: V \rightarrow X$ est l'inclusion d'un ouvert de Zariski dense lisse sur K et où $\mathcal{G}$ est un faisceau de $\mathbf{F}_l$ -modules localement constant. En effet, prenons tels V et $\mathcal{G}$. Insérons un ouvert affinoïde $X(\delta)$ entre U et X comme ci-dessus, et considérons les suites exactes compatibles

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_{\text{ét}}^n(X, j_! j^* \mathcal{F}) & \longrightarrow & H_{\text{ét}}^n(X, \mathcal{F}) & \longrightarrow & H_{\text{ét}}^n(Z, i^* \mathcal{F}) \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & H_{\text{ét}}^n(X(\delta), j_! j^* \mathcal{F}) & \longrightarrow & H_{\text{ét}}^n(X(\delta), \mathcal{F}) & \longrightarrow & H_{\text{ét}}^n(X(\delta) \cap Z, i^* \mathcal{F}) \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & H_{\text{ét}}^n(U, j_! j^* \mathcal{F}) & \longrightarrow & H_{\text{ét}}^n(U, \mathcal{F}) & \longrightarrow & H_{\text{ét}}^n(U \cap Z, i^* \mathcal{F}) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

où l'on a utilisé le fait que le foncteur i_* d'une immersion fermée i est exact. Comme $\dim(Z) < \dim(X)$ par densité de U , et que $X(\delta) \cap Z \subset^\dagger Z$ est une inclusion stricte d'affinoïdes rigides, l'application verticale en haut à droite est d'image finie par récurrence. Donc, si l'application $H_{\text{ét}}^n(X(\delta), j_! j^* \mathcal{F}) \rightarrow H_{\text{ét}}^n(U, j_! j^* \mathcal{F})$ est d'image finie, l'application $H_{\text{ét}}^n(X, \mathcal{F}) \rightarrow H_{\text{ét}}^n(X(\delta), \mathcal{F})$ le sera aussi par (1.1.4). Quant à la cohomologie étale à support compact, les arguments sont similaires, sauf qu'il faille considérer le diagramme de suites exactes compatibles suivant

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_{\text{ét},c}^n(U, j_! j^* \mathcal{F}) & \longrightarrow & H_{\text{ét},c}^n(U, \mathcal{F}) & \longrightarrow & H_{\text{ét},c}^n(U \cap Z, i^* \mathcal{F}) \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & H_{\text{ét},c}^n(X(\delta), j_! j^* \mathcal{F}) & \longrightarrow & H_{\text{ét},c}^n(X(\delta), \mathcal{F}) & \longrightarrow & H_{\text{ét},c}^n(X(\delta) \cap Z, i^* \mathcal{F}) \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & H_{\text{ét},c}^n(X, j_! j^* \mathcal{F}) & \longrightarrow & H_{\text{ét},c}^n(X, \mathcal{F}) & \longrightarrow & H_{\text{ét},c}^n(Z, i^* \mathcal{F}) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

où pour la colonne à droite, on a utilisé que pour une immersion fermée i , on a une équivalence $i_! \simeq i_*$.

(v) Si $l \neq p$, les groupes $H_{\text{ét}}^n(X, \mathcal{F})$ sont déjà des groupes finis d'après [30, Theorem 1.3] et [51, chapitre II, §5.2]. On peut alors supposer que $\mathcal{F} = j_! \mathcal{G}$ et $l = p$. Par dévissage à l'aide de (2.2.3), on peut supposer qu'il existe un revêtement fini étale $\pi: V' \rightarrow V$, de degré premier à p sur chaque composante connexe de V , tel que $\pi^* \mathcal{G}$ est une extension successive de faisceaux constants $\mathbf{F}_p$. Par la méthode de la trace (appliquée au morphisme fini étale π), le morphisme naturel $\mathcal{G} \rightarrow \pi_* \pi^* \mathcal{G}$ est un facteur direct. D'autre part, par extension de Riemann non archimédienne (2.2.4), il existe un morphisme fini $\tilde{\pi}: Y \rightarrow X$ tel que $\tilde{\pi}^{-1}(V) \rightarrow V$ est identifié à π . Notons $\tilde{j}$ l'inclusion ouverte $V' = \pi^{-1}(V) \hookrightarrow Y$. Donc $\mathcal{F} = j_! \mathcal{G}$ est un facteur direct de

$$j_! \pi_* \pi^* \mathcal{G} \simeq j_! \pi_! \pi^* \mathcal{G} \simeq \tilde{\pi}_! \tilde{j}_! \pi^* \mathcal{G} \simeq \tilde{\pi}_* \tilde{j}_! \pi^* \mathcal{G}.$$

(Pour un morphisme propre, les $(-)_!$ et $(-)_*$ sont isomorphes.) Donc, par l'exactitude de $\tilde{\pi}_*: \text{Shv}(Y_{\text{ét}}) \rightarrow \text{Shv}(X_{\text{ét}})$ [31, Proposition 2.6.4], d'où l'annulation de $R^i \tilde{\pi}_*$ pour $i > 0$, la question de la finitude pour $H_{\text{ét}}^n(X, \mathcal{F}) \rightarrow H_{\text{ét}}^n(U, \mathcal{F})$ revient à celle pour $H_{\text{ét}}^n(Y, \tilde{j}_! \mathbf{F}_p) \rightarrow H_{\text{ét}}^n(\tilde{\pi}^{-1}(U), \tilde{j}_! \mathbf{F}_p)$, et il en est de même pour

la cohomologie étale à support compact.

Observons que l'inclusion ouverte $\tilde{\pi}^{-1}(U) \subset^\dagger Y$ sur K est encore une inclusion stricte d'affinoïdes rigides par [9, §6.3, Lemma 7 (ii)] (ou par [31, Lemma 1.10.17, iii), iv), et Remark 1.3.19, iii])). Donc, en renommant Y comme X , l'inclusion ouverte $\tilde{j}: V' \rightarrow Y$ comme $j: V \rightarrow X$, et $\tilde{\pi}^{-1}(U)$ comme U , on se ramène à démontrer que les applications

$$H_{\text{ét}}^n(X, j_! \pi^* \mathcal{G}) \rightarrow H_{\text{ét}}^n(U, j_! \pi^* \mathcal{G}), \quad H_{\text{ét},c}^n(U, j_! \pi^* \mathcal{G}) \rightarrow H_{\text{ét},c}^n(X, j_! \pi^* \mathcal{G})$$

sont d'image finie pour tout $n \in \mathbf{N}$. Or, comme $\pi^* \mathcal{G}$ est une extension successive de $\mathbf{F}_p$, par dévissage comme dans l'étape (ii), on est ramené à démontrer que les applications

$$H_{\text{ét}}^n(X, j_! \mathbf{F}_p) \rightarrow H_{\text{ét}}^n(U, j_! \mathbf{F}_p), \quad H_{\text{ét},c}^n(U, j_! \mathbf{F}_p) \rightarrow H_{\text{ét},c}^n(X, j_! \mathbf{F}_p)$$

sont d'image finie pour tout $n \in \mathbf{N}$.

(vi) Il reste à traiter les coefficients $\mathcal{F} = j_! \mathbf{F}_p$ avec j l'inclusion ouverte d'un ouvert de Zariski dense dans X . Notons $i: Z \hookrightarrow X$ l'inclusion du fermé de Zariski (réduit) complémentaire. La proposition dans ce cas découle aussitôt du dévissage

$$0 \rightarrow j_! \mathbf{F}_p \rightarrow \mathbf{F}_p \rightarrow i_* \mathbf{F}_p \rightarrow 0$$

et de la conjecture (0.6). En effet, en prenant la cohomologie étale et celle à support compact sur un ouvert W de X (et en tenant compte du fait que $i_* \simeq i_!$ car i est une immersion fermée), on obtient les suites exactes longues

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H_{\text{ét}}^{n-1}(W \cap Z, \mathbf{F}_p) \rightarrow H_{\text{ét}}^n(W, j_! \mathbf{F}_p) \rightarrow H_{\text{ét}}^n(W, \mathbf{F}_p) \rightarrow \cdots, \\ \cdots \rightarrow H_{\text{ét},c}^{n-1}(W \cap Z, \mathbf{F}_p) \rightarrow H_{\text{ét},c}^n(W, j_! \mathbf{F}_p) \rightarrow H_{\text{ét},c}^n(W, \mathbf{F}_p) \rightarrow \cdots. \end{aligned}$$

Les deux côtés étant à coefficients constants $\mathbf{F}_p$, la conjecture (0.6) combinée avec le lemme (1.1.4) donne alors la finitude voulue, par un raisonnement similaire à celui de (iv). $\square$

2.2.7 - Remarque. La constructibilité de Zariski est essentielle dans la preuve, puisque le dévissage là-dedans demande du moins que le fermé complémentaire d'un ouvert considéré porte naturellement une structure d'espace rigide.

2.2.8 - Corollaire. Soit X un espace rigide partiellement propre de dimension d sur K . Supposons que la conjecture (0.6) soit vraie en dimension $\leq d$. Alors pour tous $n \in \mathbf{N}$, $m \in \mathbf{N}^*$ et pour tout faisceau de $\mathbf{Z}/m$ -modules Zariski-constructible $\mathcal{F}$ sur $X_{\text{ét}}$, le groupe abélien condensé $\underline{H}_{\text{ét}}^n(X, \mathcal{F})$ provient d'un groupe profini; plus précisément, pour tout système d'ouverts admissibles quasi-compacts $\{U_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ tel que $U_i \subset^\dagger U_{i+1}$ et que $X = \bigcup_i U_i$, on a

$$\underline{H}_{\text{ét}}^n(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_i H_{\text{ét}}^n(U_i, \mathcal{F}|_{U_i}),$$

et que $\varinjlim_i H_{\text{ét}}^n(U_i, \mathbf{Z}/p^m)$, muni de la topologie pro-discrète, est profini.

Démonstration. Verbatim comme dans la preuve de (2.1.7). $\square$

2.3 Application aux tours de Drinfeld en niveau fini

Expliquons maintenant une application de la conjecture (0.6), qui sera établie en dimension 1, aux tours de Drinfeld en niveau fini pour montrer une variante de [14, théorème 2.1] comme dans l'exemple ci-dessous. Elle serait également applicable à d'autres espaces symétriques.

2.3.1 - Proposition. Soit X un espace rigide séparé de dimension d sur K muni d'une action continue d'un groupe localement compact G . Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons que X admette des recouvrements localement finis du type

$$\mathcal{U}_t = \{gU_t\}_{\bar{g} \in G/H}, \quad \forall t = 0, \dots, n$$

où

$$U_0 \subset^\dagger \cdots \subset^\dagger U_n$$

est une chaîne stricte d'ouverts admissibles quasi-compacts de X stabilisés par le même sous-groupe ouvert H de G . Supposons que la conjecture (0.6) soit vraie en dimension d . Alors, pour tout faisceau Zariski-constructible $\mathcal{F}$ sur $X_{\text{ét}}$ qui est G -équivariant, la $\mathbf{Z}/p^m$ -représentation $H_{\text{ét}}^n(X, \mathcal{F})$ continue de G est profinie et admet une filtration finie dont les gradués sont des sous-quotients d'inductions $\text{Ind}_K^G W$, où K est un sous-groupe ouvert d'indice fini de H , et que W est une $\mathbf{Z}/p^m$ -représentation finie continue de K .

Démonstration. On a des actions continues naturelles de G sur les $\coprod_{\bar{g} \in G/H} gU_t$, compatible avec les inclusions $gU_t \rightarrow gU_{t+1}$. Notons $\text{Rep}_G^{\text{wcpf}}(\mathbf{Z}/p^m) \subset \text{Rep}_G^{\text{cont}}(\mathbf{Z}/p^m)$ la sous-catégorie pleine des $\mathbf{Z}/p^m$ -représentations profinies admettant une filtration finie comme décrite dans l'énoncé ; c'est une sous-catégorie épaisse. Considérons les suites spectrales de Čech convergentes compatibles

$$\begin{array}{ccc} E_1^{i,j}(\mathcal{U}_{t+1}) = \prod_{\bar{g}=(\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_i) \in (G/H)^i} H_{\text{ét}}^j(g_1 U_{t+1} \cap \dots \cap g_i U_{t+1}, \mathcal{F}) & \Longrightarrow & H_{\text{ét}}^{i+j}(X, \mathcal{F}) \\ \downarrow & & \downarrow \text{id} \\ E_1^{i,j}(\mathcal{U}_t) = \prod_{\bar{g}=(\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_i) \in (G/H)^i} H_{\text{ét}}^j(g_1 U_t \cap \dots \cap g_i U_t, \mathcal{F}) & \Longrightarrow & H_{\text{ét}}^{i+j}(X, \mathcal{F}) \end{array}$$

où la flèche de gauche est induite sur les facteurs par la restriction le long des inclusions respectives. Comme X est séparé sur K , les ouverts $g_1 U_t \cap \dots \cap g_i U_t$ sont quasi-compacts et d'après [9, §6.3, Lemma 7 (iii)], on a des inclusions strictes $g_1 U_t \cap \dots \cap g_i U_t \subset^\dagger g_1 U_{t+1} \cap \dots \cap g_i U_{t+1}$, donc la flèche verticale en chaque composante du produit est d'image finie, que l'on notera $A_{1, \bar{g}}^{i,j}(t)$, par la proposition (2.2.6). D'après (1.1.8), il suffit alors de montrer que la représentation $\prod_{\bar{g} \in (G/H)^i} A_{1, \bar{g}}^{i,j}(t)$ appartient à $\text{Rep}_G^{\text{wcpf}}(\mathbf{Z}/p^m)$, ce qui revient à étudier les G -orbites dans $(G/H)^i$ telles que $g_1 \bar{U}_{t+1} \cap \dots \cap g_i \bar{U}_{t+1}$ ne soit pas vide pour tout (ou un) $\bar{g} = (\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_i)$ dans cette orbite. D'une part, par l'hypothèse de la finitude locale des recouvrements $\mathcal{U}_t$, il n'y a qu'un nombre fini de telles orbites. D'autre part, pour tout $\bar{g} = (\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_i) \in (G/H)^i$, son stabilisateur sous l'action diagonale de G est

$$G_{\bar{g}} = g_1 H g_1^{-1} \cap \dots \cap g_i H g_i^{-1}$$

un sous-groupe ouvert d'indice fini de $g_1 H g_1^{-1}$. Donc $G_{\bar{g}_1^{-1} \bar{g}}$ est un sous-groupe ouvert d'indice fini de H . Pour conclure, notons que

$$\prod_{\bar{g}' \in G/H} A_{1, \bar{g}' \bar{g}}^{i,j}(t) \simeq \text{Ind}_{G_{\bar{g}_1^{-1} \bar{g}}}^G A_{1, \bar{g}_1^{-1} \bar{g}}^{i,j}(t)$$

pour tout $\bar{g} = (\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_i) \in (G/H)^i$. □

2.3.2 - Exemple. Soit $d \geq 2$ un entier. Considérons le demi-espace de Drinfeld sur K

$$\Omega_K^{d-1} = \mathbf{P}_K^{d-1} \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H,$$

où $\mathcal{H}$ est la famille des hyperplans K -rationnels dans $\mathbf{P}_K^{d-1}$. Soit

$$\dots \rightarrow \mathcal{M}_n \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_0 \rightarrow \Omega_K^{d-1}$$

la tour de Drinfeld, modèles rigides analytiques sur K des espaces rigides analytiques $\mathcal{M}_{n, \check{K}} / \varpi_K^{\mathbf{Z}}$ construite dans [19] (pour rappel, $\mathcal{M}_{0, \check{K}} = (\Omega_K^{d-1})_{\check{K}} \times \mathbf{Z}$ et l'action de ϖ_K décale la deuxième coordonnée n par $d = v_{\varpi_K}(\det(\text{diag}(\varpi_K, \dots, \varpi_K)))$). Le groupe de Lie p -adique $\text{GL}_d(K)$ agit de façon continue et équivariante sur la tour de Drinfeld, avec son centre Z agissant trivialement. Alors pour toute extension finie L de K , l'espace rigide $\mathcal{M}_{n, L}$, le changement de base de $\mathcal{M}_n$ à L , vérifie les conditions ci-dessus avec $G = \text{GL}_d(K)$. Si la conjecture (0.6) était valide en dimension $d-1$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, la $\mathbf{Z}/p^m$ -représentation $H_{\text{ét}}^n(\mathcal{M}_{n, L}, \mathbf{Z}/p^m)$ de $\text{GL}_d(K)$ serait profinie, extension de sous-quotients de la forme $\text{Ind}_{KZ}^G W$, où K est un sous-groupe ouvert d'indice fini du sous-groupe *pro- p -Iwahori standard* $I(1)$, et que W est une $\mathbf{Z}/p^m$ -représentation finie continue de KZ ⁸.

8. C'est plus faible qu'être de *présentation finie*.

Démonstration. En effet, comme les morphismes $\mathcal{M}_{n,L} \rightarrow \mathcal{M}_n \rightarrow \Omega_K^{d-1}$ d'espaces rigides sur K sont finis étales, en particulier propres, il suffit de trouver une paire $U \subset^\dagger U'$ d'ouverts quasi-compacts admissibles dans l'espace rigide de base Ω_K^{d-1} stabilisé par un sous-groupe ouvert H de G , et tels que les translatés de U par $\mathrm{GL}_d(K)$ forment un recouvrement ouvert et localement fini de Ω_K^{d-1} . Par exemple, en suivant la notation de [24, III, 1] : soit $\mathcal{BT}$ l'immeuble de Bruhat-Tits de $\mathrm{PGL}_d(K)$, qui est muni d'une action de $\mathrm{PGL}_d(K)$; soit Δ le simplexe maximal (c'est-à-dire de dimension $d-1$; c'est aussi la dimension de $\mathcal{BT}$) correspondant à la chaîne standard

$$\varpi_K \mathcal{O}_K^{\oplus d} \subset \varpi_K \mathcal{O}_K^{\oplus(d-1)} \oplus \mathcal{O}_K \subset \cdots \subset \varpi_K \mathcal{O}_K \oplus \mathcal{O}_K^{\oplus(d-1)} \subset \mathcal{O}_K^{\oplus d};$$

on peut alors prendre

$$U_t := \bigcup_{\substack{\Delta' \in |\mathcal{BT}| \\ d(\Delta', \Delta) \leq t}} (\widehat{\Omega}_{\Delta'}^0)_\eta, \quad t \in \mathbf{N}$$

et

$$H := I(1)Z,$$

où $d(\Delta', \Delta) \leq t$ signifie que Δ' peut être connecté à Δ par une chaîne $\Delta' = \Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_t = \Delta$ de simplexes maximaux adjacents. Il reste à voir que la famille d'ouverts $\{gU_0\}_{g \in \mathrm{GL}_d(K)}$ recouvre Ω_K^{d-1} . En effet, son modèle formel $\widehat{\Omega}_{\mathcal{O}_K}^{d-1}$ admet comme recouvrement ouvert la famille $\{g\widehat{\Omega}_\Delta^0 = \widehat{\Omega}_{g\Delta}^0\}_{g \in \mathrm{GL}_d(K)}$ grâce au fait que l'action de $\mathrm{PGL}_d(K)$ sur l'immeuble permute transitivement les simplexes maximaux [24, II, Remarque 2.1.5]. $\square$

3 Preuve de la conjecture (0.6) pour les courbes

La preuve de la conjecture (0.6) pour les courbes se réduira à étudier le cas en présence d'un modèle formel semi-stable de l'inclusion ouverte, qui est la partie la plus technique et qui se restreint fortement aux *courbes*. Les étapes de la réduction, qui peuvent être effectuées de deux manières (l'une pour les courbes lisses et l'autre pour les courbes générales), seront abordées dans les deux sections suivantes. La première manière repose sur l'existence de modèles formels semi-stables après une extension finie convenable de K pour les courbes [10, 22], tandis que la seconde manière peuvent être réalisée en dimension quelconque grâce aux résultats de résolution des singularités en caractéristique mixte dus à Saito et à Temkin [47, 55].

3.0.1. Nous ferons appel à la théorie de Raynaud [9, Chapter 8] sur les espaces rigides (sur K), qui interprète les espaces rigides sur K comme des fibres génériques de schémas formels admissibles sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_K)$. Rappelons qu'un schéma formel $\mathfrak{X}$ sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_K)$ est dit *admissible* si $\mathfrak{X}$ est localement de la forme $\mathrm{Spf}(A)$ avec A plat et topologiquement de présentation finie sur $\mathcal{O}_K$ [9, §7.3, Definition 3], ce qui revient à dire qu'avec A topologiquement de type fini sur $\mathcal{O}_K$ et sans $\mathfrak{m}_K$ -torsion (car $\mathcal{O}_K$ est noethérien⁹). Deux schémas formels admissibles quasi-compacts sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_K)$ ont les fibres génériques isomorphes si et seulement s'ils sont tous deux dominés par un même schéma formel admissible au moyen d'*éclatements formels admissibles* [9, §8.2, Definition 3 ; §8.4, Lemma 4 (d)].

Voici un résultat [9, §8.4, Lemma 5] que nous allons utiliser souvent : Soit $\mathfrak{X}$ un schéma formel admissible quasi-compact $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_K)$. Soit $\{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de l'espace rigide $\mathfrak{X}_\eta$. Alors il existe un éclatement formel admissible $\mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}$ ainsi qu'un recouvrement ouvert $\{\mathfrak{U}_i\}_{i \in I}$ de $\mathfrak{X}'$ tels que la famille rigide associée $\{(\mathfrak{U}_i)_\eta\}_{i \in I}$ coïncide avec le recouvrement $\{U_i\}_{i \in I}$.

3.1 Cas des modèles semi-stables d'une inclusion stricte

Cette section est consacrée à la partie technique de la démonstration, admettant que nous ayons déjà un modèle semi-stable de l'inclusion ouverte stricte. À cette fin, nous allons utiliser la filtration de Bloch-Kato-Hyodo sur les cycles proches et analyserons ses interactions avec la restriction de l'inclusion ouverte sur la fibre spéciale.

9. Cette équivalence reste vraie pour des anneaux de base plus généraux que $\mathcal{O}_K$, cf. [9, §7.3, au début, et Corollary 5].

3.1.1. Image et adhérence schématiques. Soit Y un schéma localement noethérien. Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme de schémas. Il existe un plus petit sous-schéma fermé Y' de X par lequel f se factorise [26, proposition (9.5.1)], que l'on appellera *image schématique* de Y par le morphisme f . De façon plus précise, elle est définie par l'idéal $\mathcal{I} := \ker(\mathcal{O}_X \rightarrow f_*\mathcal{O}_Y)$. En outre, l'espace sous-jacent de Y' est l'adhérence topologique de Zariski $\overline{f(Y)}$ dans X .

Lorsque f est l'injection canonique d'un sous-schéma fermé Y de X , on appelle Y' également *adhérence schématique* de Y dans X , et on note $\overline{Y} := Y'$.

3.1.2 - Lemme ([42, Lemma 2.5]). *Soit $\mathcal{U} \rightarrow \mathfrak{X}$ une immersion ouverte d'un ouvert quasi-compact dans un schéma formel admissible sur $\mathcal{O}_K$ telle que $\mathcal{U}_\eta \subset^\dagger \mathfrak{X}_\eta$ est une inclusion stricte d'affinoïdes rigides. Alors l'adhérence schématique $\overline{\mathcal{U}_s}$ de $\mathcal{U}_s$ dans $\mathfrak{X}_s$ est propre sur k .*

Démonstration. Par hypothèse, on a des inclusions d'affinoïdes rigides $\mathcal{U}_\eta \subset \mathfrak{X}_\eta(r) \subset \mathfrak{X}_\eta$ pour certain $r \in \mathbb{Q} \cap]0, 1[$ et une présentation $\mathfrak{X}_\eta = \mathrm{Sp}(K\langle T_1, \dots, T_m \rangle / J)$. Notons A l'image de

$$\mathcal{O}_K\langle T_1, \dots, T_m \rangle \rightarrow K\langle T_1, \dots, T_m \rangle / J,$$

et notons $A(r)$ l'image de

$$\mathcal{O}_K\langle T_1, \dots, T_m, S_1, \dots, S_m \rangle \rightarrow K\langle T_1, \dots, T_m, S_1, \dots, S_m \rangle / (J, T_1^{r_2} - p^{r_1}S_1, \dots, T_m^{r_2} - p^{r_1}S_m),$$

où $r = \frac{r_1}{r_2}$ avec $r_1, r_2 \in \mathbb{N}$. Elles sont des $\mathcal{O}_K$ -algèbres p -adiquement complètes admissibles (3.0.1), et on a un morphisme naturel $\mathrm{Spf} A(r) \rightarrow \mathrm{Spf} A$ qui donne sur les fibres génériques l'inclusion $\mathfrak{X}_\eta(r) \subset \mathfrak{X}_\eta$, et sur la fibre spéciale l'inclusion du sous-schéma fermé Z dans $\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{m}_K A)$ définie par l'idéal $(T_1^{r_1}, \dots, T_m^{r_1})$. Le support de Z est réduit au point fermé $s_0 \in \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{m}_K A)$ définie par l'idéal maximal $(T_1, \dots, T_m)$.

Soit $\mathrm{Spf} A_U$ un modèle formel admissible de l'affinoïde rigide $\mathcal{U}_\eta$. D'après la théorie de Raynaud (3.0.1), on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{U} & \xrightarrow{\quad} & \mathfrak{X} & & \\ \uparrow & & \uparrow & & \\ \mathcal{U}'' & \xrightarrow{\quad} & \mathfrak{X}'' & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathcal{U}' & \searrow & & & \\ \mathrm{Spf} A_U & & \mathrm{Spf} A(r) & \longrightarrow & \mathrm{Spf} A \end{array}$$

où les flèches verticales sont des éclatements formels admissibles, donc propres sur les fibres spéciales, et que les flèches horizontales sont des immersions ouvertes. L'image de $\mathcal{U} \rightarrow \mathfrak{X}$ est aussi l'image de $\mathcal{U}'' \rightarrow \mathfrak{X}'' \rightarrow \mathfrak{X}$. Or, le morphisme $\mathcal{U}_s'' \rightarrow \mathfrak{X}_s''$ se factorise dans une fibre projective car $\mathrm{Spf} A(r) \rightarrow \mathrm{Spf} A$ se factorise par Z , son adhérence schématique $\overline{\mathcal{U}_s''}$ est alors propre¹⁰. Son image schématique dans $\mathfrak{X}_s$, qui est propre [52, Lemma 0AH6], est égale aussi à l'adhérence de $\mathcal{U}_s$ dans $\mathfrak{X}_s$ ¹¹. $\square$

3.1.3 - Corollaire. *Soit $\mathcal{U} \rightarrow \mathfrak{X}$ une immersion ouverte d'un ouvert quasi-compact dans un schéma formel admissible séparé sur $\mathcal{O}_K$ telle que $\mathcal{U}_\eta \subset^\dagger \mathfrak{X}_\eta$ est une inclusion stricte. Alors l'adhérence schématique $\overline{\mathcal{U}_s}$ de $\mathcal{U}_s$ dans $\mathfrak{X}_s$ est propre sur k .*

Démonstration. On peut supposer d'avoir des recouvrements admissibles finis affinoïdes

$$\mathcal{U}_\eta = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \subset^\dagger \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha \subset \mathfrak{X}_\eta$$

10. Si une immersion ouverte $U \subset X$ se factorise par un schéma fermé $Z \rightarrow X$, alors $U \rightarrow Z$ est une immersion ouverte. En effet, $U \rightarrow Z$ est un homéomorphisme sur une partie ouverte de Z , et que pour tout $x \in U$, on a $\mathcal{O}_{Z,x} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{U,x}$ [26, proposition (4.2.2, a)], puisque $\mathcal{O}_{X,x} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{Z,x} \rightarrow \mathcal{O}_{U,x}$ dont le composé est un isomorphisme.

11. Notons f le morphisme $\mathfrak{X}_s'' \rightarrow \mathfrak{X}_s$. L'adhérence $\overline{\mathcal{U}_s''}$ de $\mathcal{U}_s''$ dans $\mathfrak{X}_s''$ est projective. L'adhérence de $\mathcal{U}_s$ dans $\mathfrak{X}_s$ est l'image schématique par f de $\overline{\mathcal{U}_s''}$; en effet, on a $\ker(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_s} \rightarrow i_*\mathcal{O}_{\mathcal{U}_s}) \subset \ker(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_s} \rightarrow f_*i''_*\mathcal{O}_{\mathcal{U}_s'')})$, avec égalité si f_* est un éclatement.

avec des inclusions strictes $U_\alpha \subset^\dagger V_\alpha$ d'ouverts affinoïdes admissibles. Alors, selon la théorie de Raynaud (3.0.1), on a un diagramme commutatif comme suit

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathfrak{U}' & \xlongequal{\quad} & \bigcup_\alpha \mathfrak{U}'_\alpha & \longrightarrow & \bigcup_\alpha \mathfrak{B}'_\alpha & \longrightarrow & \mathfrak{X}' \\
 \downarrow & & \cup & & \cup & & \downarrow \\
 & & \mathfrak{U}'_\alpha & \longrightarrow & \mathfrak{B}'_\alpha & & \\
 \downarrow & & & & & & \downarrow \\
 \mathfrak{U} & \xrightarrow{\quad} & & & & & \mathfrak{X}
 \end{array}$$

où les flèches verticales sont des éclatements formels admissibles, donc propres sur les fibres spéciales, et que les flèches horizontales sont des immersions ouvertes. Alors l'application de fibres spéciales $(\mathfrak{U}'_\alpha)_s \rightarrow (\mathfrak{B}'_\alpha)_s \subset \mathfrak{X}_s$ se factorise par son adhérence de Zariski $\overline{(\mathfrak{U}'_\alpha)_s}$ dans $(\mathfrak{B}'_\alpha)_s$, qui est propre sur k par le lemme (3.1.2). Donc $\overline{(\mathfrak{U}'_\alpha)_s}$ est aussi son adhérence dans $\mathfrak{X}'_s$ puisque le morphisme d'un schéma propre sur k vers un schéma séparé sur k est propre [27, corollaire (5.4.3)]. Alors l'application de fibres spéciales $\mathfrak{U}'_s \rightarrow \mathfrak{X}'_s$ se factorise par son adhérence dans $\mathfrak{X}'_s$, qui est l'image schématique du morphisme $\coprod_\alpha \overline{(\mathfrak{U}'_\alpha)_s} \rightarrow \mathfrak{X}'_s$. Or, celle-ci est propre sur k ¹², donc $\mathfrak{U}_s \rightarrow \mathfrak{X}_s$ se factorise par un sous-schéma fermé de $\mathfrak{X}_s$ qui est propre sur k . $\square$

3.1.4 - Lemme. Soit Y un schéma localement noethérien. Soit $V \rightarrow Y$ un ouvert. Considérons le sous-schéma ouvert

$$V^{\text{sat}} := Y \setminus \overline{(Y \setminus V)},$$

où $\overline{(-)}$ dénote l'adhérence schématique d'un sous-schéma de Y .

- (i) On a des inclusions ouvertes $V \subset V^{\text{sat}} \subset \overline{V}$.
- (ii) Supposons que localement pour la topologie fidèlement plate de présentation finie sur Y , chaque composante irréductible de Y soit définie par une seule section globale. Alors l'immersion ouverte $j: V^{\text{sat}} \rightarrow Y$ est un morphisme affine.
- (iii) Notons $\bar{j}$ l'immersion fermée $\overline{V} \rightarrow Y$. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur $Y_{\text{ét}}$ admettant une filtration finie $\text{Fil}^\bullet \mathcal{F}$ dont chaque gradué $\text{gr}^\bullet \mathcal{F}$ est muni d'une structure de faisceau cohérent. Posons

$$\mathcal{K} := \ker(\mathcal{F} \rightarrow j_* j^* \mathcal{F})$$

muni de la filtration restreinte $\text{Fil}^\bullet \mathcal{K} = \mathcal{K} \cap \text{Fil}^\bullet \mathcal{F}$, et

$$\mathcal{G} := \mathcal{F}/\mathcal{K} \simeq \text{im}(\mathcal{F} \rightarrow j_* j^* \mathcal{F})$$

muni de la filtration quotient $\text{Fil}^\bullet \mathcal{G}$, image de $\text{Fil}^\bullet \mathcal{F}$. Alors,

- (iii.a) on a $j^* \mathcal{K} = 0$, $\mathcal{K}|_{Y \setminus \overline{V}} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{F}|_{Y \setminus \overline{V}}$ et $\mathcal{G} \xrightarrow{\simeq} \bar{j}_* \bar{j}^* \mathcal{G}$;
- (iii.b) sous la condition de (ii), si de plus le conoyau du morphisme naturel

$$(3.1.4.1) \quad \text{Fil}^\bullet \mathcal{K} \rightarrow \ker(\text{gr}^\bullet \mathcal{F} \xrightarrow{\gamma_\bullet} j_* j^* \text{gr}^\bullet \mathcal{F})$$

est une extension successive de faisceaux cohérents, alors les gradués $\text{gr}^\bullet \mathcal{G}$ sont respectivement des extensions successives de faisceaux cohérents; plus précisément, on a la suite exacte naturelle suivante

$$0 \rightarrow \ker(\gamma_\bullet)/\text{gr}^\bullet \mathcal{K} \rightarrow \text{gr}^\bullet \mathcal{G} \rightarrow \text{im}(\gamma_\bullet) \rightarrow 0,$$

où le faisceau de gauche est isomorphe au conoyau de (3.1.4.1) et est une extension successive de faisceaux cohérents à support dans $Y \setminus V^{\text{sat}}$, et le faisceau de droite (en tant que $\mathcal{O}_Y$ -module quotient de $\text{gr}^\bullet \mathcal{F}$) est cohérent à support dans $\overline{V}$.

Démonstration. (i) Cela découle par définition.

12. Soit $\mathcal{I}_\alpha$ le faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_s}$ définissant $\overline{(\mathfrak{U}'_\alpha)_s}$, alors cette adhérence et image schématique est définie par le faisceau d'idéaux $\bigcap_\alpha \mathcal{I}_\alpha$. Une simple application du critère valuatif de propreté permettra de conclure.

(ii) La propriété que $j: V^{\text{sat}} \rightarrow Y$ soit un morphisme affine se vérifie localement pour la topologie fidèlement plate quasi-compacte sur Y [29, proposition (2.7.1, xiii)] (qui est plus fine que la topologie fidèlement plate de présentation finie).

Soit $g: Y' \rightarrow Y$ un morphisme plat et localement de présentation finie. Notons

$$V'^{\text{sat}} := Y' \setminus \overline{Y' \setminus g^{-1}(V)}.$$

Montrons que $V'^{\text{sat}} = g^{-1}(V^{\text{sat}})$. Pour cela, il suffit de montrer que

- (a) $\overline{g^{-1}(W)} \xrightarrow{\cong} \overline{g^{-1}(\overline{W})}$ pour tout ouvert $W \subset Y$;
- (b) $g^{-1}(Y \setminus Z) \xrightarrow{\cong} Y' \setminus g^{-1}(Z)$ pour tout fermé $Z \subset Y$.

Le (b) est clair. Le (a) est vraie emsemblistement, puisque l'on a $\overline{g^{-1}(W)} \subset g^{-1}(\overline{W})$ par continuité de g , et l'inclusion inverse car g est ouvert en étant plat et localement de présentation finie [29, théorème (2.4.6)].

Par hypothèse, en travaillant localement pour la topologie fidèlement plate de présentation finie sur Y , on peut supposer que Y est un schéma affine noethérien, et que ses composantes irréductibles $\{Y_i\}_{i \in I}$ sont de la forme $Y_i = V(f_i)$ pour certain $f_i \in \mathcal{O}(Y)$. Comme Y est noethérien, l'ensemble I est fini. Soit $I_0 \subset I$ le sous-ensemble des i tels que V rencontre Y_i . Alors, on a $\overline{V} = \bigcup_{i \in I_0} Y_i$, puis $Y \setminus \overline{V} = \bigcup_{i \notin I_0} (Y_i \setminus (\bigcup_{i \in I_0} Y_i))$, donc

$$\overline{Y \setminus \overline{V}} = \bigcup_{i \notin I_0} Y_i = \bigcup_{i \notin I_0} V(f_i) = V\left(\prod_{i \notin I_0} f_i\right).$$

Ainsi, son complémentaire V^{sat} dans Y est identifié comme l'ouvert principal $D(\prod_{i \notin I_0} f_i) \subset Y$, qui est affine.

(iii) Le fait que $j^* \mathcal{K} = 0$ découle de la définition. Montrons l'isomorphisme $\mathcal{K}|_{Y \setminus \overline{V}} \xrightarrow{\cong} \mathcal{F}_{Y \setminus \overline{V}}$. D'après (ii), l'immersion ouverte j est affine, donc $R^1 j_* \mathcal{H} = 0$ pour tout faisceau cohérent $\mathcal{H}$ sur V^{sat} (et pour la topologie étale, ou même pour la topologie fidèlement plate de présentation finie). On en déduit par récurrence sur la longueur de la filtration $\text{Fil}^\bullet \mathcal{F}$ (et par l'exactitude de j^*) que pour tout $m \in \mathbf{N}$, on a que $R^1 j_* j^* \text{Fil}^\bullet \mathcal{F} = 0$ et que la suite courte (exacte à gauche)

$$0 \rightarrow j_* j^* \text{Fil}^{m+1} \mathcal{F} \rightarrow j_* j^* \text{Fil}^m \mathcal{F} \rightarrow j_* j^* \text{gr}^m \mathcal{F} \rightarrow 0$$

est exacte à droite, donc qu'elle est exacte.

On dispose du diagramme commutatif suivant

$$(3.1.4.2) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Fil}^{m+1} \mathcal{K} & \longrightarrow & \text{Fil}^m \mathcal{K} & \longrightarrow & \ker(\gamma_m) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \text{Fil}^{m+1} \mathcal{F} & \longrightarrow & \text{Fil}^m \mathcal{F} & \longrightarrow & \text{gr}^m \mathcal{F} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \gamma_m \\ 0 & \longrightarrow & j_* j^* \text{Fil}^{m+1} \mathcal{F} & \longrightarrow & j_* j^* \text{Fil}^m \mathcal{F} & \longrightarrow & j_* j^* \text{gr}^m \mathcal{F} \longrightarrow 0 \end{array}$$

dont la ligne centrale et les colonnes sont exactes par définitions. La dernière ligne est exacte d'après ce qui précède, et puis la première est exacte par le lemme du serpent. Ceci étant, on obtient le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Fil}^{m+1} \mathcal{K} & \longrightarrow & \text{Fil}^m \mathcal{K} & \longrightarrow & \text{gr}^m \mathcal{K} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \text{Fil}^{m+1} \mathcal{F} & \longrightarrow & \text{Fil}^m \mathcal{F} & \longrightarrow & \text{gr}^m \mathcal{F} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \text{Fil}^{m+1} \mathcal{G} & \longrightarrow & \text{Fil}^m \mathcal{G} & \longrightarrow & \text{gr}^m \mathcal{G} \longrightarrow 0 \end{array}$$

dont les colonnes sont exactes et dont la dernière ligne est exacte par le lemme du serpent. Ainsi, en appliquant

le lemme du serpent au diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{gr}^m \mathcal{K} & \longrightarrow & \mathrm{gr}^m \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathrm{gr}^m \mathcal{G} \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow \mathrm{id} & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \ker(\gamma_m) & \longrightarrow & \mathrm{gr}^m \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathrm{im}(\gamma_m) \longrightarrow 0,
\end{array}$$

on obtient une suite exacte

$$0 \rightarrow \ker(\gamma_m)/\mathrm{gr}^m \mathcal{K} \rightarrow \mathrm{gr}^m \mathcal{G} \rightarrow \mathrm{im}(\gamma_m) \rightarrow 0$$

Il reste à voir que les deux faisceaux de côté, $\ker(\gamma_m)/\mathrm{gr}^m \mathcal{K}$ et $\mathrm{im}(\gamma_m)$, vérifient les propriétés de cohérence voulues. En effet, remarquons d'abord que $\ker(\gamma_m)$ et $\mathrm{im}(\gamma_m)$ héritent la cohérence de $\mathrm{gr}^m \mathcal{F}$. Pour ceci, on remarque que $j_* j^* \mathrm{gr}^m \mathcal{F}$ est un faisceau quasi-cohérent sur $Y_{\mathrm{\acute{e}t}}$ puisque Y est localement noethérien [26, proposition (9.4.2)]. Le morphisme naturel γ_m est un morphisme de $\mathcal{O}_Y$ -modules sur $Y_{\mathrm{\acute{e}t}}$, donc $\ker(\gamma_m)$ et $\mathrm{im}(\gamma_m)$ sont aussi quasi-cohérents, même cohérents car ils sont de type fini. Quant à leurs supports, $\ker(\gamma_m)$ est à support dans $Y \setminus V^{\mathrm{sat}}$ car γ_m devient un isomorphisme sur l'ouvert $V^{\mathrm{sat}} \subset Y$; et $\mathrm{im}(\gamma_m)$ est à support dans $\overline{V}$ car $j_* j^* \mathrm{gr}^m \mathcal{F}$ l'est. L'hypothèse supplémentaire (3.1.4.1) revient au même de dire que le sous-faisceau $\mathrm{gr}^m \mathcal{K} \subset \ker(\gamma_m)$ est de quotient extension successive de faisceaux cohérents, donc $\ker(\gamma_m)/\mathrm{gr}^m \mathcal{K}$ est une extensions successives de faisceaux cohérents. $\square$

3.1.4.3 - Remarque. La clef de la preuve est le fait que si $\mathcal{F}$ est un faisceau étale cohérent sur un schéma localement noethérien Y , alors pour toute immersion ouverte $j: V \rightarrow Y$, le $\mathcal{O}_Y$ -module $j_* j^* \mathcal{F}$ est un faisceau quasi-cohérent, donc l'image du morphisme de faisceaux $\mathcal{F} \rightarrow j_* j^* \mathcal{F}$ est cohérent [26, proposition (9.4.2)] et provient d'un faisceau cohérent sur l'adhérence schématique $\overline{V}$ de V dans Y .

3.1.5. Fixons des notations pour le lemme suivant. Soit ϖ_K une uniformisante de K . Soit

$$\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(\mathcal{O}_K \langle X_0, \dots, X_n \rangle / (X_0 \cdots X_r - \varpi_K))$$

avec $0 \leq r \leq n$, et posons $Y = \mathfrak{X}_s$. Soit V un ouvert de Zariski dense dans l'ouvert

$$V' = \mathrm{Spec}(k[X_0, \dots, X_s, X_{s+1}^{\pm 1}, \dots, X_r^{\pm 1}, X_{r+1}, \dots, X_n] / (X_0 \cdots X_s)) \stackrel{j}{\subset} Y$$

pour un certain entier $0 \leq s \leq r$. Posons $f = X_0 \cdots X_s$ et $g = X_{s+1} \cdots X_r$; notons $\bar{f}$ et $\bar{g}$ leurs réductions modulo ϖ . Alors, on a l'égalité $V^{\mathrm{sat}} = V'$; en effet, on a $\overline{V} = \overline{V'}$, qui est le sous-schéma fermé de Y défini par $\bar{g}$, donc $Y \setminus \overline{V} = D(\bar{f})$, d'où l'adhérence schématique $\overline{Y \setminus \overline{V}}$ est le sous-schéma fermé de Y défini par $\bar{g}$.

Reprenons les notations introduites dans la section 1.2 concernant les cycles proches et la filtration de Bloch-Kato-Hyodo. Soit $\mathcal{F} := U^1 R^q \lambda_* \mu_p^{\otimes q}$ muni de la filtration de Bloch-Kato-Hyodo $U^\bullet$ et $V^\bullet$ (1.2.3). Posons $\mathcal{K} = \ker(\mathcal{F} \rightarrow j_* j^* \mathcal{F})$ et $\mathcal{G} = \mathrm{im}(\mathcal{F} \rightarrow j_* j^* \mathcal{F})$; notons U^m, V^m les filtrations induites de celles de Bloch-Kato-Hyodo sur $\mathcal{F}$, et désignons leurs gradués par

$$\mathrm{gr}_0^m = U^m / V^m, \quad \mathrm{gr}_1^m = V^m / U^{m+1}, \quad m \in \mathbf{N}^*$$

pour les faisceaux $\mathcal{K}, \mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$. Posons également

$$\gamma_{m,0}: \mathrm{gr}_0^m R^q \lambda_* \mathbf{F}_p \rightarrow j_* j^* \mathrm{gr}_0^m R^q \lambda_* \mathbf{F}_p$$

$$\gamma_{m,1}: \mathrm{gr}_1^m R^q \lambda_* \mathbf{F}_p \rightarrow j_* j^* \mathrm{gr}_1^m R^q \lambda_* \mathbf{F}_p$$

pour $m \in \mathbf{N}^*$.

Lemme. Pour tout $m \in \mathbf{N}^*$, soit $\alpha_m \in \mathbf{N}$ tel que $m + p\alpha_m \geq e'$. Avec les notations et hypothèses ci-dessus, on a

$$\bar{f}^{\alpha_m} \cdot \mathrm{gr}_i^m \mathcal{F} \subset \mathrm{gr}_i^m \mathcal{K} \subset \ker(\gamma_{m,i}) \subset \mathrm{gr}_i^m \mathcal{F}$$

pour $i \in \{0,1\}$, où sur le premier terme on considère la structure de $\mathcal{O}_Y$ -module (cohérent) (1.2.6) sur $\mathrm{gr}_i^m \mathcal{F}$. En

particulier, $\ker(\gamma_{m,i})/\mathrm{gr}_i^m \mathcal{K}$ est un faisceau à support dans

$$\overline{V} \setminus V^{\mathrm{sat}} = V(\bar{f}, \bar{g}) = \mathrm{Spec}(k[X_0, \dots, X_s, X_{s+1}^{\pm 1}, \dots, X_r^{\pm 1}, X_{r+1}, \dots, X_n] / (X_0 \cdots X_s, X_{s+1} \cdots X_r)).$$

Démonstration. D'après ce qui précède, on a

$$V \subset V^{\mathrm{sat}} = V' = D(\bar{g}) \subset \overline{V} = V(\bar{f}) \subset Y$$

qui, avec la filtration de Bloch-Kato-Hyodo sur $\mathcal{F} = U^1 R^q \lambda_* \mu_p^{\otimes q}$, vérifient les conditions de (3.1.4) (sauf celles de (iii.b)). Donc $\ker(\gamma_{m,i})$ est à support dans $Y \setminus V^{\mathrm{sat}} = V(\bar{g})$ pour tout $m \in \mathbf{N}^*$; alors $\ker(\gamma_{m,i})/\mathrm{gr}_i^m \mathcal{K}$ l'est aussi.

Le sous- $\mathcal{O}_Y$ -module cohérent $\bar{f}^{\alpha_m} \cdot \mathrm{gr}_0^m \mathcal{F} \subset \mathrm{gr}_0^m \mathcal{F}$ est engendré par les formes différentielles logarithmiques

$$\bar{f}^{p\alpha_m} \bar{x} \cdot \wedge_{i=1}^{q-1} \mathrm{dlog} \bar{a}_i$$

pour $x \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ et $a_i \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}^\times \cup \{X_i\}_{i=0}^r$, qui possèdent des antécédents

$$\{1 + \varpi^m f^{p\alpha_m} x, a_1, \dots, a_{q-1}\} \in U^m \mathcal{F}.$$

Notons $\mathfrak{B}$ l'ouvert de $\mathfrak{X}$ de support V^{sat} . On vérifie que

$$\begin{aligned} & \{1 + \varpi_K^m f^{p\alpha_m} x, a_1, \dots, a_{q-1}\}_{|V^{\mathrm{sat}}} \\ &= \{1 + \varpi_K^m f^{p\alpha_m} x|_{\mathfrak{B}}, a_1|_{\mathfrak{B}}, \dots, a_{q-1}|_{\mathfrak{B}}\} \\ &= \{1 + \varpi_K^{m+p\alpha_m} g^{-p\alpha_m} x|_{\mathfrak{B}}, a_1|_{\mathfrak{B}}, \dots, a_{q-1}|_{\mathfrak{B}}\} \in U^{m+p\alpha_m} \mathcal{F}|_{V^{\mathrm{sat}}} \subset U^{e'} \mathcal{F}|_{V^{\mathrm{sat}}} = 0. \end{aligned}$$

Donc $\{1 + \varpi_K^m f^{p\alpha_m} x, a_1, \dots, a_{q-1}\} \in \mathcal{K}$. Ainsi, chaque $\bar{f}^{p\alpha_m} \bar{x} \cdot \wedge_{i=1}^{q-1} \mathrm{dlog} \bar{a}_i$ possède un antécédent dans $U^m \mathcal{K}$, c'est-à-dire que $\bar{f}^{\alpha_m} \cdot \mathrm{gr}_0^m \mathcal{F} \subset \mathrm{gr}_0^m \mathcal{K}$. De même manière, nous obtenons l'inclusion $\bar{f}^{\alpha_m} \cdot \mathrm{gr}_1^m \mathcal{F} \subset \mathrm{gr}_1^m \mathcal{K}$. Les autres inclusions sont triviales.

En particulier, sur l'ouvert $D(\bar{f})$, les inclusions deviennent des identités, donc le support du faisceau $\ker(\gamma_{m,i})/\mathrm{gr}_i^m \mathcal{K}$ est inclus dans $V(\bar{f})$ pour tous $m \in \mathbf{N}^*$ et $i \in \{0, 1\}$. $\square$

3.1.6 - Proposition. Soit $\mathcal{U} \rightarrow \mathfrak{X}$ une immersion ouverte d'un ouvert quasi-compact dans un schéma formel quasi-compact séparé semi-stable de dimension relative 1 sur $\mathcal{O}_K$ telle que $\mathcal{U}_\eta \subset^\dagger \mathfrak{X}_\eta$ est une inclusion stricte. Supposons que $\zeta_p \in K$. Avec les notations de (1.2.3), pour tous $n, q \in \mathbf{N}$, les applications

$$H_{\mathrm{ét}}^n(\mathfrak{X}_s, R^q \lambda_* \mathbf{F}_p) \rightarrow H_{\mathrm{ét}}^n(\mathcal{U}_s, R^q \lambda_* \mathbf{F}_p|_{\mathcal{U}_s}),$$

$$H_{\mathrm{ét},c}^n(\mathcal{U}_s, R^q \lambda_* \mathbf{F}_p|_{\mathcal{U}_s}) \rightarrow H_{\mathrm{ét},c}^n(\mathfrak{X}_s, R^q \lambda_* \mathbf{F}_p)$$

sont d'image finie.

Démonstration. Comme $\zeta_p \in K$, on peut identifier $R^q \lambda_* \mathbf{F}_p \simeq R^q \lambda_* \mu_p^{\otimes q}$.

Traitons d'abord le cas de la cohomologie étale usuelle. Le point crucial sera l'existence d'une filtration sur certain faisceau intermédiaire sur $\overline{\mathcal{U}}_s$ étendant $R^q \lambda_* \mathbf{F}_p|_{\mathcal{U}_s}$ telle que les gradués sont des faisceaux cohérents ou des faisceaux constructibles, ce qui donnera la finitude de sa cohomologie sur $\overline{\mathcal{U}}_s$. Afin de pouvoir le montrer, nous allons appliquer le lemme (3.1.4, iii.b) à $Y = \mathfrak{X}_s$, $V = \mathcal{U}_s$ et $\mathcal{F} = U^1 R^q \lambda_* \mu_p^{\otimes q}$ muni de la filtration de Bloch-Kato-Hyodo (1.2.3). Pour ceci, vérifions d'abord que ses conditions sont remplies. Conservons les notations du lemme (3.1.4, iii); nous allons en fait montrer que les $\ker(\gamma_{m,i})/\mathrm{gr}_i^m \mathcal{K}$ pour $m \in \mathbf{N}^*$ et $i \in \{0, 1\}$ sont des faisceaux gratte-ciel constructibles.

Soit $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_s}$ le faisceau d'idéaux définissant le sous-schéma fermé réduit $\overline{V} = \overline{\mathcal{U}}_s \subset \mathfrak{X}_s$. Pour tout $m \in \mathbf{N}^*$, soit α_m le plus petit entier naturel tel que $m + p\alpha_m \geq e'$. Comme une conséquence directe de (3.1.5), on obtient que

$$(3.1.6.1) \quad \mathcal{I}^{\alpha_m} \cdot \mathrm{gr}_i^m \mathcal{F} \subset \mathrm{gr}_i^m \mathcal{K} \subset \ker(\gamma_{m,i}) \subset \mathrm{gr}_i^m \mathcal{F}.$$

En effet, il suffit de montrer la première inclusion. Comme $\mathfrak{X}$ est semi-stable sur $\mathcal{O}_K$, localement pour la topologie étale, $\mathfrak{X}$ admet un morphisme étale vers

$$\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_K\langle X_0, \dots, X_d \rangle / (X_0 \cdots X_r - \varpi))$$

avec $0 \leq r \leq d$ (ici, d est égal à la dimension relative de $\mathfrak{X}$ sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_K)$, qui est égal à 1 par hypothèse). Si on a $\overline{\mathfrak{U}}_s = \emptyset$ ou $\overline{\mathfrak{U}}_s = \mathfrak{X}_s$, alors $\mathcal{I} = \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_s}$ et $\mathcal{K} = \mathcal{F}$, ou $\mathcal{I} = 0$ et $\mathcal{K} = \ker(\gamma_{m,i}) = 0$; le résultat est trivial dans ce cas. On peut donc supposer que $f = X_0 \cdots X_s$ avec $0 < s < r$; alors $\mathcal{I} = \bar{f}\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_s}$ et le (3.1.5) implique (3.1.6.1).

Pour $m \in \mathbf{N}^*$ et $i \in \{0,1\}$, le faisceau $\ker(\gamma_{m,i})/\mathcal{I}^{\alpha_m} \cdot \mathrm{gr}_i^m \mathcal{F}$ est cohérent et à support dans $\overline{\mathfrak{U}}_s \setminus \mathfrak{U}_s^{\mathrm{sat}}$ comme on le voit localement. Comme $\mathfrak{X}$ est de dimension relative 1 sur $\mathcal{O}_K$, l'ensemble $\overline{\mathfrak{U}}_s \setminus \mathfrak{U}_s^{\mathrm{sat}}$ est une partie discrète de points fermés comme on le voit localement pour la topologie étale; cet ensemble est fini par la propriété de $\overline{\mathfrak{U}}_s$ sur k (3.1.2). Ainsi, le faisceau $\ker(\gamma_{m,i})/(\mathcal{I}^{\alpha_m} \cdot \mathrm{gr}_i^m \mathcal{F})$ est un faisceau cohérent gratte-ciel à support dans un ensemble fini de points fermés; il est alors un faisceau constructible car k est une extension finie de $\mathbf{F}_p$; donc l'est aussi son quotient $\ker(\gamma_{m,i})/\mathrm{gr}_i^m \mathcal{K}$ d'après (3.1.6.1).

Regardons d'abord les groupes de cohomologie étale. Selon les paragraphes précédents, on peut appliquer le lemme (3.1.4, iii.b) à $Y = \mathfrak{X}_s$, $V = \mathfrak{U}_s$ et $\mathcal{F} = U^1 R^q \lambda_* \mathbf{F}_p \simeq U^1 R^q \lambda_* \mu_p^{\otimes q}$ muni de la filtration de Bloch-Kato-Hyodo (1.2.5); alors la filtration de Bloch-Kato-Hyodo induite sur $\mathcal{G} = \mathrm{im}(\mathcal{F} \rightarrow j_* j^* \mathcal{F}) = \mathcal{F}/\mathcal{K}$ se raffine par une autre dont les gradués sont des faisceaux cohérents à support dans $\overline{\mathfrak{U}}_s$ ou des faisceaux cohérents (constructibles) à support dans $\overline{\mathfrak{U}}_s \setminus \mathfrak{U}_s$. Notons que le faisceau $R^q \lambda_* \mathbf{F}_p/\mathcal{F}$ est une extension de faisceaux constructibles (1.2.5). Donc $R^q \lambda_* \mathbf{F}_p/\mathcal{K}$ est une extension successive de faisceaux constructibles et faisceaux cohérents qui sont tous deux à support dans $\overline{\mathfrak{U}}_s$; donc sa restriction $R^q \lambda_* \mathbf{F}_p/\mathcal{K}|_{\overline{\mathfrak{U}}_s}$ est une extension successive de faisceaux constructibles et faisceaux cohérents. Donc le groupe $H_{\mathrm{ét}}^n(\overline{\mathfrak{U}}_s, R^q \lambda_* \mathbf{F}_p/\mathcal{K}|_{\overline{\mathfrak{U}}_s})$ est fini¹³. Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_{\mathrm{ét}}^n(\mathfrak{X}_s, R^q \lambda_* \mathbf{F}_p) & \longrightarrow & H_{\mathrm{ét}}^n(\mathfrak{X}_s, R^q \lambda_* \mathbf{F}_p/\mathcal{K}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ & & H_{\mathrm{ét}}^n(\overline{\mathfrak{U}}_s, R^q \lambda_* \mathbf{F}_p/\mathcal{K}|_{\overline{\mathfrak{U}}_s}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_{\mathrm{ét}}^n(\mathfrak{U}_s, R^q \lambda_* \mathbf{F}_p|_{\mathfrak{U}_s}) & \xrightarrow{\simeq} & H_{\mathrm{ét}}^n(\mathfrak{U}_s, R^q \lambda_* \mathbf{F}_p/\mathcal{K}|_{\mathfrak{U}_s}), \end{array}$$

montre alors que l'application $H_{\mathrm{ét}}^n(\mathfrak{X}_s, R^q \lambda_* \mathbf{F}_p) \rightarrow H_{\mathrm{ét}}^n(\mathfrak{U}_s, R^q \lambda_* \mathbf{F}_p|_{\mathfrak{U}_s})$ est d'image finie.

Passons maintenant au cas de la cohomologie étale à support compact. Soit $\mathcal{I}' \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_s}$ le faisceau d'idéaux définissant le sous-schéma fermé réduit $(\mathfrak{X}_s \setminus \mathfrak{U}_s^{\mathrm{sat}})_{\mathrm{red}} \subset \mathfrak{X}_s$. Notons $j': \mathfrak{X}_s \setminus \overline{\mathfrak{U}}_s \rightarrow \mathfrak{X}_s$, $\mathcal{F}' := R^q \lambda_* \mathbf{F}_p \simeq R^q \lambda_* \mu_p^{\otimes q}$ et $\mathcal{K}' := \ker(\mathcal{F}' \rightarrow j'_* j'^* \mathcal{F}')$. Comme précédemment, en appliquant (3.1.5), on obtient

$$(3.1.6.2) \quad \mathcal{I}'^{\alpha_m} \cdot \mathrm{gr}_i^m \mathcal{F}' \subset \mathrm{gr}_i^m \mathcal{K}' \subset \ker(\gamma_{m,i}) \subset \mathrm{gr}_i^m \mathcal{F}'$$

pour $m \in \mathbf{N}^*$ et que les faisceaux $\ker(\gamma'_{m,i})/\mathcal{I}'^{\alpha_m} \cdot \mathrm{gr}_i^m \mathcal{F}'$ sont cohérents constructibles à support dans

$$\overline{\mathfrak{X}_s \setminus \overline{\mathfrak{U}}_s} \Big|_{(\mathfrak{X}_s \setminus \overline{\mathfrak{U}}_s)^{\mathrm{sat}}} = \overline{\mathfrak{U}}_s \setminus \mathfrak{U}_s^{\mathrm{sat}}.$$

Le faisceau $\mathcal{K}'$ étant à support dans $\mathfrak{X}_s \setminus (\mathfrak{X}_s \setminus \overline{\mathfrak{U}}_s) = \overline{\mathfrak{U}}_s$, les faisceaux cohérents $\mathcal{I}'^{\alpha_m} \cdot \mathrm{gr}_i^m \mathcal{F}'$ pour $m \in \mathbf{N}^*$ le sont aussi. Pour $m = 0$, on a $\mathrm{gr}_i^0 \mathcal{K}' \subset \mathrm{gr}_i^0 \mathcal{F}'$ pour $i \in \{0,1\}$, qui sont des faisceaux constructibles, donc les $\mathrm{gr}_i^0 \mathcal{K}'$ le sont aussi. Ainsi, $\mathcal{K}'$ est une extension successive de faisceaux constructibles et faisceaux cohérents qui sont tous deux à support dans $\overline{\mathfrak{U}}_s$, donc sa restriction $\mathcal{K}'|_{\overline{\mathfrak{U}}_s}$ est une extension successive de faisceaux constructibles et faisceaux cohérents. Donc le groupe $H_{\mathrm{ét}}^n(\overline{\mathfrak{U}}_s, \mathcal{K}'|_{\overline{\mathfrak{U}}_s})$ est fini (voir la note de bas de page, p. 24). Comme le support de $j'_* j'^* \mathcal{F}'$ est disjoint de $\mathfrak{U}_s$, on a $\mathcal{K}'|_{\mathfrak{U}_s} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{F}'|_{\mathfrak{U}_s}$, et on obtient le diagramme

13. En effet, les groupes de cohomologie étale d'un faisceau cohérent sur un schéma propre sur un corps fini k sont finis car ils sont identifiés aux groupes de cohomologie de Zariski [3, exposé VII, proposition 4.3], qui sont de dimension finie sur k [28, théorème (3.2.1)]. Quant aux faisceaux constructibles, cela découle de la finitude sur un corps algébriquement clos [3, exposé XIV, corollaire 1.2] et la suite spectrale de la descente galoisienne, moyennant le fait que les groupes de cohomologie galoisienne d'un $\mathcal{G}_k$ -module fini sont encore finis [51, chapitre 1, §3.5, exemples, 1)].

commutatif

$$\begin{array}{ccc}
H_{\text{ét},c}^n(\mathfrak{X}_s, R^q \lambda_* \mathbf{F}_p) & \longleftarrow & H_{\text{ét},c}^n(\mathfrak{X}_s, \mathcal{K}') \\
\uparrow & & \uparrow \\
H_{\text{ét},c}^n(\mathfrak{U}_s, R^q \lambda_* \mathbf{F}_p|_{\mathfrak{U}_s}) & \longleftarrow \simeq & H_{\text{ét},c}^n(\mathfrak{U}_s, \mathcal{K}'|_{\mathfrak{U}_s}) \\
& & \uparrow \\
& & H_{\text{ét}}^n(\overline{\mathfrak{U}_s}, \mathcal{K}'|_{\overline{\mathfrak{U}_s}})
\end{array}$$

qui montre que l'application $H_{\text{ét},c}^n(\mathfrak{U}_s, R^q \lambda_* \mathbf{F}_p|_{\mathfrak{U}_s}) \rightarrow H_{\text{ét},c}^n(\mathfrak{X}_s, R^q \lambda_* \mathbf{F}_p)$ est d'image finie. $\square$

3.1.7 - Remarque. La même stratégie s'applique au cas où $\mathfrak{X}$ est seulement supposé log-lisse (et de dimension relative 1) sur $\mathcal{O}_K$. En effet, grâce à [58, Theorem 3.3] et [58, Lemma 3.2], on se réduit au cas où $\mathfrak{X}$ est quasi-log-lisse sur $\mathcal{O}_K$ au sens de [46, Definition 5.2]. Ensuite, par [46, Corollary 4.5, Theorem 5.4], on déduit par comparaison « formel-algébrique » comme dans (1.2.5) une version formelle-rigide quasi-log-lisse de la filtration du type Bloch-Kato-Hyodo, à partir de laquelle on conclut par les arguments similaires à ceux qu'on vient de présenter.

3.1.8 - Proposition. *Soit*

$$U \subset X(\delta_1) \subset^\dagger X(\delta_2) \subset^\dagger \cdots \subset^\dagger X(\delta_r) \subset^\dagger X(\delta_{r+1}) = X$$

avec $0 < \delta_1 < \cdots < \delta_{r+1} = 1$ une chaîne d'ouverts admissibles quasi-compacts qui est la fibre générique d'une chaîne d'ouverts quasi-compacts d'un schéma formel séparé semi-stable de dimension relative 1 sur $\mathcal{O}_K$

$$\mathfrak{U} \subset \mathfrak{U}_1 \subset \mathfrak{U}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{U}_r \subset \mathfrak{U}_{r+1} = \mathfrak{X}.$$

Supposons que $\zeta_p \in K$ et posons $l := \dim X + 2$ (donc $l = 3$). Alors pour $n \in \mathbf{N}$ et $t \in [1, r+1-l]$, l'application

$$H_{\text{ét}}^n(X(\delta_{t+l}), \mathbf{F}_p) \rightarrow H_{\text{ét}}^n(X(\delta_t), \mathbf{F}_p)$$

est d'image finie, et, si de plus il existe une compactification $\mathfrak{X} \hookrightarrow \overline{\mathfrak{X}}$ ¹⁴, l'application

$$H_{\text{ét},c}^n(X(\delta_t), \mathbf{F}_p) \rightarrow H_{\text{ét},c}^n(X(\delta_{t+l}), \mathbf{F}_p)$$

est aussi d'image finie.

Démonstration. On a $R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{Y}_s, R\lambda_* -) = R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{Y}_\eta, -)$ pour tout schéma formel admissible $\mathfrak{Y}$ sur $\mathcal{O}_K$ par définition de $R\lambda_*$. Donc pour tout $t \in [1, r]$, on dispose des suites spectrales convergentes compatibles suivantes :

$$\begin{array}{ccc}
E_2^{i,j} = H_{\text{ét}}^i((\mathfrak{U}_{t+1})_s, R^j \lambda_* \mathbf{F}_p) & \Longrightarrow & H_{\text{ét}}^{i+j}(X(\delta_{t+1}), \mathbf{F}_p) \\
\downarrow & & \downarrow \\
E_2^{i,j} = H_{\text{ét}}^i((\mathfrak{U}_t)_s, R^j \lambda_* \mathbf{F}_p) & \Longrightarrow & H_{\text{ét}}^{i+j}(X(\delta_t), \mathbf{F}_p)
\end{array}$$

où $\lambda : X_{\text{ét}} \rightarrow \mathfrak{X}_{\text{ét}} \simeq (\mathfrak{X}_s)_{\text{ét}}$ est la projection de sites. La page E_2 est concentrée en degrés $j \in [0, \dim X + 1] = [0, l - 1]$, donc il en est de même pour la page E_∞ . Comme $\dim X = 1$, chacune des flèches verticales de gauche est d'image finie d'après (3.1.6). On en déduit par lemme (1.1.5) que pour tous $n \in \mathbf{N}$ et $t \in [1, r+1-l]$, l'application $H_{\text{ét}}^n(X(\delta_{t+l}), \mathbf{F}_p) \rightarrow H_{\text{ét}}^n(X(\delta_t), \mathbf{F}_p)$ est d'image finie.

Quant à la cohomologie étale à support compact, en présence d'une compactification $\mathfrak{X} \hookrightarrow \overline{\mathfrak{X}}$, pour toute immersion ouverte $\iota : \mathfrak{Y} \hookrightarrow \mathfrak{X}$, on a des équivalences

$$R\Gamma_{\text{ét},c}(\mathfrak{Y}_s, R\lambda_* -) \simeq R\Gamma_{\text{ét}}(\overline{\mathfrak{Y}}_s, \iota_{s!} R\lambda_* -) \xrightarrow{\simeq} R\Gamma_{\text{ét}}(\overline{\mathfrak{Y}}_s, R\lambda_* \iota_{\eta!} -) \simeq R\Gamma_{\text{ét}}(\overline{\mathfrak{Y}}_\eta, \iota_{\eta!} -) \simeq R\Gamma_{\text{ét},c}(\mathfrak{Y}_\eta, -)$$

14. D'après le théorème de compactification Nagata, cette compactification existe si $\mathfrak{X}$ est le complété p -adique d'un schéma algébrique X sur $\mathcal{O}_K$; en effet, on peut choisir une compactification $X \hookrightarrow \overline{X}$ sur $\mathcal{O}_K$, puis en prendre le morphisme de schémas formels associé.

où la deuxième est due à [31, Corollary 3.5.11 (ii)]. Donc pour tout $t \in [1, r]$, on dispose des suites spectrales convergentes compatibles suivantes

$$\begin{array}{ccc} E_2^{i,j} = H_{\text{ét},c}^i((\mathcal{U}_t)_s, R^j \lambda_* \mathbf{F}_p) & \Longrightarrow & H_{\text{ét},c}^{i+j}(X(\delta_t), \mathbf{F}_p) \\ \downarrow & & \downarrow \\ E_2^{i,j} = H_{\text{ét},c}^i((\mathcal{U}_{t+1})_s, R^j \lambda_* \mathbf{F}_p) & \Longrightarrow & H_{\text{ét},c}^{i+j}(X(\delta_{t+1}), \mathbf{F}_p) \end{array}$$

à partir desquelles on conclut comme précédemment. $\square$

La preuve a montré en fait que :

3.1.9 - Corollaire. *Si la proposition (3.1.6) vaut en dimension d , alors il en est de même pour la proposition (3.1.8).* $\square$

3.2 Cas des courbes lisses

Nous présentons dans cette section une preuve de la conjecture (0.6) pour les courbes lisses et pour la cohomologie étale usuelle (voir le théorème (3.2.5)), ce qui demandera quelques préliminaires sur les modèles potentiellement semi-stables pour les courbes [10].

3.2.1. Compactification lisse et modèles compatibles pour les courbes. Soit X un affinoïde rigide lisse de dimension 1 sur K . Construisons une variété rigide projective lisse $\overline{X}$ qui contient X comme un ouvert affinoïde admissible. Pour cela, commençons par algébriser X . Comme X est le spectre d'une algèbre de Tate sur K , il en existe un modèle formel affine $\mathfrak{X}$ admissible sur $\mathcal{O}_K$, nécessairement rig-lisse. On peut donc l'algébriser comme un schéma affine $X^{\text{alg}} = \text{Spec } A$ admissible sur $\mathcal{O}_K$ dont la fibre générique $X_\eta^{\text{alg}} = \text{Spec } A_K$ est lisse sur K [54, 2.1.2, Theorem 3.1.3].

Construisons maintenant une compactification lisse $\overline{X}$ de X . Comme X_η^{alg} est une courbe algébrique affine lisse sur le corps parfait K , elle admet une unique compactification X_η^{alg} sur K : c'est une courbe algébrique projective lisse sur K qui contient X_η^{alg} comme un ouvert dense [52, Remark 0H1F], et elle est unique par le critère valuatif de séparation. En prenant des espaces analytiques associés (dénotés par $(-)^{\text{rig}}$), on obtient

$$X = \mathfrak{X}_\eta = ((X^{\text{alg}})_p^\wedge)_\eta \subset (X_\eta^{\text{alg}})^{\text{rig}} \subset \overline{X} := (\overline{X_\eta^{\text{alg}}})^{\text{rig}}$$

comme voulu (la première inclusion dépendant du modèle entier algébrique A ; voir par exemple [31, (0.7.6)]).

En prenant un modèle projectif admissible de X_η^{alg} sur $\mathcal{O}_K$ et puis son complété p -adique, on obtient un modèle formel projectif admissible $\overline{\mathfrak{X}}$ de $\overline{X}$.

Soit $\{U_i\}_{i \in I}$ une famille finie d'ouverts admissibles quasi-compacts de X . On la complète en un recouvrement admissible de $\overline{X}$ formé d'ouverts quasi-compacts. D'après la théorie de Raynaud [9, §8.4, Lemma 5], ce recouvrement, quitte à faire un éclatement formel admissible à $\overline{\mathfrak{X}}$, provient d'un recouvrement ouvert de $\overline{\mathfrak{X}}$ contenant une famille $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ de modèles formels (admissibles) de $\{U_i\}_{i \in I}$.

3.2.2 - Lemme (Modèles semi-stables compatibles). *Soit X un affinoïde rigide lisse sur K de dimension 1. Soit $\{U_i\}_{i \in I}$ une famille finie d'ouverts admissibles quasi-compacts de X . Alors il existe une extension finie K' de K telle que les immersions ouvertes $(U_i)_{K'} \rightarrow X_{K'}$ proviennent des immersions ouvertes de schémas formels semi-stables $\mathcal{U}_i \rightarrow \mathfrak{X}$ sur $\mathcal{O}_{K'}$.*

Démonstration. Par (3.2.1), on obtient une compactification projective et lisse $\overline{X}$ pour X , un modèle formel admissible projectif $\overline{\mathfrak{X}}$ de $\overline{X}$, et un recouvrement ouvert fini de $\overline{\mathfrak{X}}$ contenant $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I} \cup \{\mathfrak{X}\}$ qui induisent sur les fibres génériques $U_i \subset X \subset \overline{X}$. Ce recouvrement ouvert de $\overline{\mathfrak{X}}$ donne tout de suite un *recouvrement formel* $\{V_i\}_{i \in I}$ de $\overline{X}$ [10, p. 351, dernier paragraphe]. Rappelons que pour tout recouvrement formel $\mathcal{V}$ de $\overline{X}$, on peut lui associer l'unique modèle formel $\overline{X}_{\mathcal{V}}$ en recollant les $\text{Spf}(\mathcal{O}^\circ(V_i))$ pour $V_i \in \mathcal{V}$.

Dans la suite, on démontrera que tout recouvrement formel $\mathcal{V}$ peut, potentiellement après une extension finie du corps de base, être raffiné à un recouvrement formel $\mathcal{V}'$ tel que le modèle $\overline{X}_{\mathcal{V}'}$ associé soit semi-stable. Ce raffinement correspondra alors à un morphisme de schémas formels $\overline{X}_{\mathcal{V}'} \rightarrow \overline{X}_{\mathcal{V}}$ (éclatement formel). Et

les images réciproques des $\mathfrak{U}_i \subset \mathfrak{X}$ fourniront les modèles semi-stables compatibles souhaités (par abus de notation).

Il suffit de trouver un tel recouvrement pour $U_{\bar{K}} \subset X_{\bar{K}}$, puisqu'un tel recouvrement sera défini sur une extension finie de K grâce à [10, Proposition 1.4].

On suit maintenant de près la preuve du théorème [10, Stable Reduction Theorem 7.1].

Rappelons quelques notations :

- On note désormais $C = \bar{X}_{\bar{K}}$ la courbe projective et lisse.
- Soit $\mathcal{V}$ un recouvrement formel de C , on note

$$\pi: C \rightarrow \widetilde{C_{\mathcal{V}}}$$

l'application de réduction.

- Pour tout $q \in \widetilde{C_{\mathcal{V}}}$, on note

$$C_+(q) := \pi^{-1}(q)$$

la fibre formelle, qui se compactifie, en recollant des disques fermés le long de couronnes, en une courbe lisse et propre C^q [10, Definition 4.4] de genre $g(C^q)$. La notation dans *loc. cit.* est

$$C^q := C_+(q) \cup \coprod_{\mu, \nu} E_{\mu\nu}^q.$$

Par exemple, si q est un point lisse, alors $C_+(q)$ est isomorphe à un disque ouvert et on peut donc le compactifier, en recollant un disque fermé, pour obtenir une courbe isomorphe à $\mathbf{P}^1$, qui est de genre 0 ; si q est un point double, alors $C_+(q)$ est isomorphe à une couronne ouverte et donc se compactifie en $\mathbf{P}^1$ en recollant deux disques fermés — en fait, ces propriétés les caractérisent [10, Theorem 5.5]. Quant à la preuve du théorème, il s'agit alors de raffiner le recouvrement formel afin que les $C_+(q)$ soient parmi ces deux types.

- Notons

$$\gamma(C, \mathcal{V}) := \max_{q \in \widetilde{C_{\mathcal{V}}}} \{g(C^q)\}.$$

Posons $\mathcal{V}_0$ le recouvrement de C obtenu par extension scalaire de celui du début de la preuve.

D'abord, quitte à raffiner $\mathcal{V}_0$, on peut supposer que $\gamma(C, \mathcal{V}_0) = 0$. En effet, d'après [10, Proof of 7.3, Step 1], à partir d'un recouvrement formel arbitraire $\mathcal{V}$ de C , on peut en construire un raffinement $\mathcal{B}$ tel que $\gamma(C, \mathcal{B}) < \gamma(C, \mathcal{V})$ dès que ce dernier est ≥ 1 ($\mathcal{B}$ étant construit en subdivisant « l'adhérence de $C_+(q)$ » pour q tels que $g(C^q) = \gamma(C, \mathcal{V})$). Ensuite, pour tel $\mathcal{V}_0$, on a [10, Theorem 5.5]

$$C_+(q) \simeq \mathbf{P}^1 \setminus \coprod_{i \in I_q} D_i.$$

Rappelons que $\#I_q = 1$ si et seulement si q est un point lisse, $\#I_q = 2$ si et seulement si q est un point double. Suivant [10, Proof of 7.3, Step 2], quitte à subdiviser encore « l'adhérence de $C_+(q)$ » pour q singuliers, la cardinalité de tout I_q se rend ≤ 2 . Ainsi, tout point singulier q est un point double et le modèle $C_{\mathcal{V}_0}$ est semi-stable. $\square$

3.2.3 - Remarque. Une preuve alternative repose sur les études soigneuses de la structure des courbes analytiques [22, chapitre 5 et 6] (au sens de Berkovich). On peut toujours trouver un sous-ensemble sommital S de X^{Berk} contenant les $\partial^{\text{an}} U_i$ et $\partial^{\text{an}} X$ [22, (6.3.17), (6.4.1)]. Alors le modèle semi-stable associé $\mathfrak{X} := (\bar{X}, \text{Alt}(S))$ et ses ouverts $\mathfrak{U}_i := (U_i, \text{Alt}(S \cap U_i))$ conviendraient [22, Proposition (6.3.19)]. La preuve de ceci est du même esprit que celle de [10] mais dans le langage de Berkovich ; en effet, l'ensemble sommital S correspond à un atlas affinoïde formel, qui n'est autre qu'un recouvrement formel au sens de Bosch-Lütkebohmert [10, p. 351, dernier paragraphe], le modèle formel duquel est $\mathfrak{X}$.

3.2.4 - Remarque. Soient $K' \rightarrow \mathfrak{X}$ comme dans la conclusion de (3.2.2). Soit K'' une extension finie de K' . Alors il existe des immersions ouvertes de schémas formels $\mathfrak{U}'_i \rightarrow \mathfrak{X}'$ semi-stables sur $\mathcal{O}_{K''}$ induisant sur les fibres génériques les immersions ouvertes $(U_i)_{K''} \rightarrow X_{K''}$. En effet, le schéma formel $\mathfrak{X} \otimes_{\mathcal{O}_{K'}} \mathcal{O}_{K''}$ étant localement étale sur $\text{Spf}(\mathcal{O}_K \langle X_0, X_1 \rangle / (X_0 X_1 - \varpi_{K''}^m))$ (où l'on note m l'indice de ramification de l'extension

K''/K'), il suffit d'effectuer des éclatements formels admissibles du type [52, Example 0CDC] en les points singuliers.

3.2.5 - Théorème. *Soit $U \subset^\dagger X$ une inclusion ouverte stricte de courbes affinoïdes rigides lisses sur K . Alors pour tous $n, m \in \mathbf{N}$, l'application induite $H_{\text{ét}}^n(X, \mathbf{Z}/p^m) \rightarrow H_{\text{ét}}^n(U, \mathbf{Z}/p^m)$ est d'image finie.*

Démonstration. Fixons un $n \in \mathbf{N}$.

(i) Tout d'abord, par dévissage $0 \rightarrow \mathbf{Z}/p^{m-1} \xrightarrow{p} \mathbf{Z}/p^m \rightarrow \mathbf{Z}/p \rightarrow 0$ comme dans l'étape de réduction (ii) de la preuve de (2.2.6), on se ramène au cas où $m = 1$.

Traisons désormais le cas $m = 1$.

(ii) Posons

$$r := (n+1)(\dim X + 2) = 4(n+1).$$

Par l'hypothèse de l'inclusion stricte, on peut prolonger $U \subset X$ en une chaîne d'ouverts admissibles quasi-compacts

$$U \subset X(\delta_1) \subset X(\delta_2) \subset \cdots \subset X(\delta_r) \subset X(\delta_{r+1}) = X$$

avec $0 < \delta_1 < \cdots < \delta_{r+1} = 1$. Par le lemme (3.2.2) (comme on est en dimension 1), il existe une extension finie de corps K'/K telle que le changement de base vers K' de cette chaîne d'inclusions est induite par une chaîne d'ouverts quasi-compacts d'un schéma formel semi-stable sur $\mathcal{O}_{K'}$

$$\mathfrak{U} \subset \mathfrak{U}_1 \subset \mathfrak{U}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{U}_r \subset \mathfrak{U}_{r+1} = \mathfrak{X}.$$

D'après la remarque (3.2.4), quitte à agrandir K' , on peut supposer $\zeta_p \in K'$ et que l'extension K'/K soit galoisienne.

(iii) Soit $l = 3$ comme dans la proposition (3.1.8). Il s'ensuit de *loc. cit.* que pour $t \in [1, r+1-l]$, l'application $H_{\text{ét}}^m(X(\delta_{t+l})_{K'}, \mathbf{F}_p) \rightarrow H_{\text{ét}}^m(X(\delta_t)_{K'}, \mathbf{F}_p)$ est d'image finie.

(iv) Il reste la descente galoisienne. On a les suites spectrales convergentes compatibles suivantes :

$$(3.2.5.1) \quad \begin{array}{ccc} E_2^{i,j} = H^i(G, H_{\text{ét}}^j(X(\delta_{t+l})_{K'}, \mathbf{F}_p)) & \Longrightarrow & H_{\text{ét}}^{i+j}(X(\delta_{t+l}), \mathbf{F}_p) \\ \downarrow & & \downarrow \\ E_2^{i,j} = H^i(G, H_{\text{ét}}^j(X(\delta_t)_{K'}, \mathbf{F}_p)) & \Longrightarrow & H_{\text{ét}}^{i+j}(X(\delta_t), \mathbf{F}_p) \end{array}$$

où $G = \text{Gal}(K'/K)$. Chacune des flèches verticales à gauche est d'image finie d'après ce qui précède et le fait que tout groupe de cohomologie $H^\bullet(G, -)$ d'un G -module fini est fini. On en déduit par lemme (1.1.6) que pour tout $t \in [1, r+1-(n+1)l]$, l'application $H_{\text{ét}}^n(X(\delta_{t+(n+1)l}), \mathbf{F}_p) \rightarrow H_{\text{ét}}^n(X(\delta_t), \mathbf{F}_p)$ est d'image finie. $\square$

3.2.6 - Remarque. Le nombre r dans la preuve dépend de n , mais on peut aussi le rendre indépendant de n . Pour cela, on remarque que $H_{\text{ét}}^\bullet(X(\delta_t)_C, \mathbf{F}_p)$ est concentré en degrés $\bullet \leq \dim X + 1$ par [6, Theorem 7.3] (ou même concentré en degrés $\bullet \leq \dim X$ par [23, Theorem 1.7]; si l'on utilise [31, Corollary 2.8.3] au lieu de la première référence, on obtiendra la borne $2 \dim X$ à la place de $\dim X + 1$), et que la p -dimension cohomologique de $\mathcal{G}_{K'}$ est $\text{cd}_p \mathcal{G}_{K'} = 1 + \text{cd}_p \mathcal{G}_K = 2$ par [51, chapitre II, §4.3, corollaire de la proposition 12]. Alors les suites spectrales (3.2.5.1) sont concentrées en degrés

$$0 \leq j \leq (\dim X + 1) + 2 = l + 1.$$

Ainsi, les filtrations spectrales sur l'aboutissement sont de longueur au plus $l + 2$. Donc, cette fois-ci, en appliquant récursivement $l + 1$ fois (au lieu de n fois) le lemme (1.1.4), on obtient que, pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $t \in [1, r+1-(l+2)l]$, l'application $H_{\text{ét}}^n(X(\delta_{t+(l+2)l}), \mathbf{F}_p) \rightarrow H_{\text{ét}}^n(X(\delta_t), \mathbf{F}_p)$ est d'image finie. On aurait pu poser $r := (l+2)l = 15$.

3.3 Cas des courbes générales

Pour pouvoir démontrer la conjecture (0.6) pour les courbes non nécessairement lisses (voir le théorème (3.3.14)), nous allons encore recourir au résultat du cas semi-stable, mais cette fois par la méthode de l'hyper-

descente en utilisant une certaine résolution des singularités en caractéristique mixte.

Existence de modèles formels d'une immersion ouverte

3.3.1. Compactification et modèles compatibles. Soit X un affinoïde rigide lisse sur K . Présentons une variante de (3.2.1) : construisons une compactification $\overline{X}$ de X . Contrairement à (3.2.1), la lissité de la compactification ne sera plus requise ici, si bien que X n'est plus nécessairement de dimension 1. Comme dans *loc. cit.*, X admet un modèle formel admissible affine qui est le complété p -adique d'un schéma affine $X^{\text{alg}} = \text{Spec } A$ admissible sur $\mathcal{O}_K$. De plus, il existe une immersion ouverte de X^{alg} dans un schéma $\overline{X^{\text{alg}}}$ admissible et projectif (pas nécessairement lisse) sur $\mathcal{O}_K$; en effet, on peut plonger X^{alg} dans un espace projectif sur $\mathcal{O}_K$, puis y prendre l'adhérence schématique de X^{alg} . Le schéma $\overline{X^{\text{alg}}}$ est en particulier séparé. Par complétion p -adique, on obtient une immersion ouverte quasi-compacte de schémas formels admissibles sur $\mathcal{O}_K$

$$\mathfrak{X} := (X^{\text{alg}})_p^\wedge \subset \overline{\mathfrak{X}} := (\overline{X^{\text{alg}}})_p^\wedge.$$

En prenant la fibre générique rigide, on réalise X comme un ouvert affinoïde admissible dans l'espace rigide projectif sur K

$$X \subset \overline{X} := (\overline{\mathfrak{X}})_\eta.$$

Soit $\{U_i\}_{i \in I}$ une famille finie d'ouverts admissibles quasi-compacts de X . Il existe alors, d'après la théorie de Raynaud comme dans *loc. cit.*, quitte à effectuer un éclatement formel admissible de $\overline{\mathfrak{X}}$, une famille $\{\mathfrak{U}_i\}_{i \in I}$ d'ouverts de $\overline{\mathfrak{X}}$ induisant la famille $\{U_i\}_{i \in I}$ sur les fibres génériques.

3.3.2 - Lemme (Algébrisation d'éclatements formels admissibles). *L'éclaté formel admissible d'un schéma formel admissible de la forme $\mathfrak{X} = (X^{\text{alg}})_p^\wedge$ (où X^{alg} est un schéma algébrique localement de type fini et plat sur $\mathcal{O}_K$) relativement à un idéal (ouvert) $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ est défini algébriquement.*

Démonstration. Il suffit de montrer qu'il existe un idéal $\mathcal{J}^{\text{alg}} \subset \mathcal{O}_{X^{\text{alg}}}$ tel que $\mathcal{I} = \mathcal{J}^{\text{alg}} \cdot \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$. Pour cela, on peut définir $\mathcal{J}^{\text{alg}}$ comme l'image réciproque de $\mathcal{I}$ par le morphisme $\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X/p^n \mathcal{O}_X \xrightarrow{\sim} i_*(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/p^n \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ pour certain n tel que $p^n \mathcal{O}_X \subset \mathcal{I}$ (qui existe localement), ou $\mathcal{I} := \ker(\mathcal{O}_X \rightarrow i_*(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathcal{I}))$, où i est le morphisme $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ d'espaces topologiquement annelés. En effet, on vérifie localement que le complété formel de $\mathcal{J}^{\text{alg}}$ est $\mathcal{I}$. $\square$

Ainsi, tout éclatement formel admissible de $\mathfrak{X}$ provient d'un éclatement algébrique admissible de X^{alg} .

Hyperrecouvrement par des semi-stables

Avant d'exercer l'hyperdescente et d'apporter la touche finale à la preuve, il faudrait préciser les catégories où les hyperrecouvrements seront construits.

3.3.3. Travaillons avec les catégories suivantes :

- la catégorie $\text{Sch}_{\mathcal{O}_K}^{\text{adm}}$ des schémas admissibles (c'est-à-dire plats et localement de présentation finie) séparés sur $\text{Spec}(\mathcal{O}_K)$,
- la catégorie $\text{FSch}_{\mathcal{O}_K}^{\text{adm}}$ des schémas formels admissibles (3.0.1) sur $\text{Spf}(\mathcal{O}_K)$,
- la catégorie Rig_K des espaces rigides sur K .

Dans chacune d'entre elles, les produits finis et les produits fibrés existent (les objets finals étant respectivement $\text{Spec}(\mathcal{O}_K)$, $\text{Spf}(\mathcal{O}_K)$ et $\text{Sp}(K)$), donc toutes les limites finies existent. Plus précisément, le produit fibré dans $\text{Sch}_{\mathcal{O}_K}^{\text{adm}}$ est localement donné par $(A \otimes_C B)/(A \otimes_C B)[\pi^\infty]$, celui dans $\text{FSch}_{\mathcal{O}_K}^{\text{adm}}$ par $(A \hat{\otimes}_C B)/(A \hat{\otimes}_C B)[\pi^\infty]$, et celui dans Rig_K par $A \hat{\otimes}_C B$ (où ce dernier $\hat{\otimes}$ désigne le produit tensoriel complété d'anneaux Banach p -adiques). En plus, les sommes finies y existent aussi, sont disjointes et universelles¹⁵.

On considère les foncteurs

$$(3.3.3.1) \quad \text{Sch}_{\mathcal{O}_K}^{\text{adm}} \xrightarrow{(-)_p^\wedge} \text{FSch}_{\mathcal{O}_K}^{\text{adm}} \xrightarrow{(-)_\eta} \text{Rig}_K.$$

15. Terminologie de [3, exposé V bis].

3.3.4 - Lemme. Les foncteurs $(-)_p^\wedge$ et $(-)_\eta$ ci-dessus commutent aux limites finies.

Démonstration. Ceci revient à dire qu'ils commutent aux produits fibrés et aux produits finis. On le vérifie par exemple pour $(-)_p^\wedge : \text{Sch}_{\mathcal{O}_K}^{\text{adm}} \rightarrow \text{FSch}_{\mathcal{O}_K}^{\text{adm}}$ et $(-)_\eta : \text{FSch}_{\mathcal{O}_K}^{\text{adm}} \rightarrow \text{Rig}_K$. Tout d'abord, notons que le foncteur $(-)_p^\wedge$ est localement donné par l'application $\text{Spec}(A) \mapsto \text{Spf}(\widehat{A})$, tandis que le foncteur $(-)_\eta$ est localement donné par $\text{Spf}(A) \mapsto \text{Sp}(A[\frac{1}{p}])$. Vérifions qu'ils commutent aux produits fibrés.

Quant au second foncteur, on a

$$\begin{aligned} \text{Spf}(A)_\eta \times_{\text{Spf}(C)_\eta} \text{Spf}(B)_\eta &= \text{Sp}(A[\frac{1}{p}]) \times_{\text{Sp}(C[\frac{1}{p}])} \text{Sp}(B[\frac{1}{p}]) \\ &= \text{Sp}(A[\frac{1}{p}] \otimes_{C[\frac{1}{p}]} B[\frac{1}{p}]) \\ &= \text{Sp}((A \otimes_C B)[\frac{1}{p}]) \\ &= \text{Spf}(A \otimes_C B)_\eta. \end{aligned}$$

Quant au premier, on aura besoin du lemme suivant.

3.3.4.1 - Lemme. Soient R un anneau et $f \in R$. Soit M un R -module de complété $\widehat{M} := \varprojlim_n (M/f^n M)$. Alors on a un complexe

$$0 \rightarrow \widehat{M}[f^\infty] \rightarrow \widehat{M} \rightarrow \widehat{M/M[f^\infty]} \rightarrow 0.$$

Il est exact à gauche et à droite. Il est exact au milieu si de plus M de f^∞ -torsion bornée (c'est-à-dire, si $M[f^\infty] = M[f^N]$ pour certain $N \in \mathbf{N}$).

En particulier, si R est un anneau noethérien et M est un R -module de type fini, la suite est exacte.

Démonstration. On a $(M/M[f^\infty])[f^\infty] = 0$, donc la suite courte est un complexe. Elle est exacte à gauche par construction, et est exacte à droite car la complétion f -adique (classique) préserve les morphismes surjectifs [52, Lemma 0315 (2)]. Si de plus $M[f^\infty] = M[f^N]$, alors pour tout élément $(\bar{x}_n)_n \in \widehat{M}$ qui s'annule dans $M/M[f^\infty]$, on a que $x_n \in f^n M + M[f^N]$, d'où $f^N x_n \in f^n M$, donc $(\bar{x}_n)_n \in \widehat{M}[f^N]$. $\square$

Grâce à ce lemme-ci, on obtient

$$\begin{aligned} (\text{Spec}(A) \times_{\text{Spec}(C)} \text{Spec}(B))_p^\wedge &= \text{Spec}((A \otimes_C B)/(A \otimes_C B)[p^\infty])_p^\wedge \\ &= \text{Spf}\left(\frac{(A \otimes_C B)/\overline{(A \otimes_C B)[p^\infty]}}{(A \otimes_C B)[p^\infty]}\right) \\ &= \text{Spf}\left(\frac{\widehat{(A \otimes_C B)}}{\widehat{(A \otimes_C B)[p^\infty]}}\right) \\ &= \text{Spf}\left(\frac{\widehat{A} \otimes_{\widehat{C}} \widehat{B}}{\widehat{A} \otimes_{\widehat{C}} \widehat{B}[p^\infty]}\right) \\ &= \text{Spf}(\widehat{A}) \times_{\text{Spf}(\widehat{C})} \text{Spf}(\widehat{B}), \end{aligned}$$

où la troisième identité découle du lemme précédent. $\square$

3.3.5. Rappelons des notations pour les objets simpliciaux (augmentés) (cf. [3, exposé V, §7.1], [17, §5.1]).

Pour tout $n \in \mathbf{N} \cup \{-1\}$, notons $[n]$ l'ensemble fini totalement ordonné $[0, n]$. Soit Δ^+ la catégorie ayant pour objets les $[n]$ avec $n \geq -1$, et pour les morphismes les applications croissantes entre les $[n]$. Soit $\Delta \subset \Delta^+$ la sous-catégorie pleine d'objets les $[n]$ avec $n \geq 0$. Pour $m \in \mathbf{N}$, notons $\Delta_m \subset \Delta$ (resp. $\Delta_m^+ \subset \Delta^+$) la sous-catégorie pleine d'objets les $[n]$ avec $n \leq m$.

Pour toute catégorie $\mathcal{C}$, un objet simplicial (resp. objet simplicial n -tronqué, objet simplicial augmenté, objet simplicial n -tronqué augmenté) de $\mathcal{C}$ est un objet $X_\bullet$ de la catégorie $\text{Hom}(\Delta^{\text{op}}, \mathcal{C})$ (resp. de $\text{Hom}(\Delta_m^{\text{op}}, \mathcal{C})$, de $\text{Hom}((\Delta^+)^{\text{op}}, \mathcal{C})$, de $\text{Hom}((\Delta_m^+)^{\text{op}}, \mathcal{C})$) des foncteurs; un morphisme d'objets simpliciaux est un morphisme de foncteurs dans la catégorie correspondante. Pour un tel objet $X_\bullet$, notons $X_{[m]}$ l'image de $[m]$ dans $\mathcal{C}$, et notons $X_{\bullet \leq m}$ sa restriction sur la sous-catégorie pleine d'objets les $[n]$ avec $n \leq m$. Enfin, pour $n \geq -1$, notons

$$\text{cosq}_n : \text{Hom}(\Delta_n^{\text{op}}, \mathcal{C}) \rightarrow \text{Hom}(\Delta^{\text{op}}, \mathcal{C})$$

le foncteur cosquelette d'ordre n [3, exposé V, définition 7.1.1] (dans le cadre relatif, par exemple pour des objets simpliciaux augmentés vers une base, voir [17, (5.1.3)]).

3.3.6 - Corollaire. Les foncteurs $(-)_p^\wedge$ et $(-)_\eta$ (3.3.3.1) commutent aux foncteurs cosquelette cosq_n correspondants.

Démonstration. Ceci découle aussitôt du lemme (3.3.4) grâce à l'expression [3, exposé V bis, (3.0.1.2)] (voir aussi [52, Lemma 0183]) des foncteurs cosquelette comme les limites finies

$$(\cosq_n X_{\bullet \leq n})_{[m]} = \lim_{(\Delta/[m])_{\leq n}^{\text{op}}} X_{\bullet \leq n}$$

pour $m \geq n$, où la limite est prise dans la catégorie des flèches de but $X_{[-1]}$. $\square$

3.3.7 - Corollaire. Soit $(Y_i)_{i \in I}$ un diagramme fini d'objets dans $\text{Sch}_{\mathcal{O}_K}^{\text{adm}}$. Si $X \rightarrow \lim_{i \in I} Y_i$ est un morphisme propre et surjectif d'objet dans $\text{Sch}_{\mathcal{O}_K}^{\text{adm}}$, alors le morphisme induit $(X_p^\wedge)_\eta \rightarrow \lim_{i \in I} (Y_i)_p^\wedge$ est aussi propre et surjectif.

Démonstration. Le composé

$$(X_p^\wedge)_\eta \rightarrow \lim_{i \in I} (Y_i)_p^\wedge \xrightarrow{(3.3.4)} \left(\lim_{i \in I} Y_i \right)_p^\wedge$$

est la fibre générique rigide du morphisme propre et surjectif $X \rightarrow \lim_{i \in I} Y_i$. Il est donc propre et surjectif par [31, Proposition 1.9.6, Lemma 3.7.3]. $\square$

3.3.8. Pour clarté, rappelons un théorème [47, Theorem 1.8/Theorem 2.9 (1)] sur l'existence d'un modèle potentiellement semi-stable pour tout log-schéma log-lisse de type fini sur un anneau de valuation discrète $\mathcal{O}_K$.

Pour toute extension finie séparable L/K , munissons leurs anneaux des entiers $\mathcal{O}_K$ et $\mathcal{O}_L$ de la log-structure canonique (voir la note de bas de page, p. 8). Pour tout log-schéma X fin et saturé (ou fs, cf. [47, §1.1] ou [34, 1.6]) sur $\mathcal{O}_K$, notons $X \otimes_{\mathcal{O}_K}^{\text{log}} \mathcal{O}_L$ le changement de base dans la catégorie des log-schémas fins et saturés. Il est obtenu en rendant fin et saturé le changement de base dans la catégorie des log-schémas [47, paragraphe avant Theorem 1.8]). Par exemple, soit $P \leftarrow R \rightarrow Q$ une carte des morphismes $X \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_K) \leftarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_L)$ de log-schémas (avec P, Q, R des monoïdes fins et saturés). Notons $P^{\text{gp}} \leftarrow R^{\text{gp}} \rightarrow Q^{\text{gp}}$ les morphismes induits entre les groupes abéliens associés, et $P^{\text{gp}} +_{R^{\text{gp}}} Q^{\text{gp}}$ la somme amalgamée. Soit enfin $P +_R^{\text{sat}} Q$ le monoïde obtenu comme le saturé de l'image du monoïde $P \oplus Q$ dans la somme amalgamée $P^{\text{gp}} +_{R^{\text{gp}}} Q^{\text{gp}}$. Alors, on peut identifier

$$X \otimes_{\mathcal{O}_K}^{\text{log}} \mathcal{O}_L = (X \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_L) \otimes_{\mathbb{Z}[P \oplus Q]} \mathbb{Z}[P +_R^{\text{sat}} Q].$$

Dans le cadre des log-schémas fins et saturés, on dispose également d'une notion de log-éclatement. D'après la construction rappelée dans [47, §2.1], un log-éclatement est en particulier un morphisme projectif et log-étale.

Théorème (Saito, cf. [47, Theorem 1.8/Theorem 2.9 (1)]). Soit X un log-schéma log-lisse et de type fini sur un anneau de valuation discrète $\mathcal{O}_K$, il existe un entier $m \geq 1$ tel que, pour toute L extension finie séparable sur K d'indice de ramification divisible par m , il existe un log-éclatement $f: W \rightarrow X \otimes_{\mathcal{O}_K}^{\text{log}} \mathcal{O}_L$ tel que $U_W := f^{-1}(U_{X,L}) \rightarrow U_{X,L} := U_X \otimes_K L$ est un isomorphisme et que (W, U_W) est semi-stable sur $\mathcal{O}_L$, où $U_X := X_{\text{triv}}$ et $X \otimes_{\mathcal{O}_K}^{\text{log}} \mathcal{O}_L$ est le log-schéma saturé de $X \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_L$.

3.3.9 - Corollaire. Pour tout schéma X de type fini séparé et plat sur $\mathcal{O}_K$, il existe une extension finie séparable L de K un morphisme projectif et surjectif $W \rightarrow X$ avec W semi-stable sur $\mathcal{O}_L$.

Démonstration. D'après [55, Theorem 1.2.9/Theorem 4.3.1 (ii)] (comme X est supposé de type fini et séparé sur $\mathcal{O}_K$), il existe une extension finie K' de K de degré une puissance de p et une altération projective $b: X' \rightarrow X$ de degré une puissance de p telles que W avec la log-structure définie par sa fibre spéciale est un log-schéma log-lisse sur $\mathcal{O}_{K'}$.

Ensuite, le théorème précédent fournit une extension L de K' et un morphisme projectif et surjectif $W \rightarrow X'$ avec W semi-stable sur $\mathcal{O}_L$. En effet, soit $f: W \rightarrow X' \otimes_{\mathcal{O}_K}^{\text{log}} \mathcal{O}_L$ le log-éclatement fourni par le théorème, qui est en particulier projectif. De plus, f est surjectif puisqu'il est fermé et que son image contient U_X qui est dense dans X (car X est un log-schéma log-régulier localement noethérien; voir [45, Proposition 2.6]). Par ailleurs, étant la saturation d'un log-schéma fin, le morphisme de schémas sous-jacents $\varphi: X' \otimes_{\mathcal{O}_K}^{\text{log}} \mathcal{O}_L \rightarrow X'$ est fini surjectif. La modification désirée est alors le composé $f \circ \varphi: W \rightarrow X'$. $\square$

3.3.10 - Proposition (Construction d'hyperrecouvrement d'un espace rigide venant d'un modèle algébrique). Soit X^{alg} un schéma de type fini séparé et plat sur $\mathcal{O}_K$. Il existe une suite $\{K_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ d'extensions finies de K contenant ζ_p et un objet simplicial $X_\bullet^{\text{alg}}$ de $\text{Sch}_{\mathcal{O}_K}^{\text{adm}}$ augmenté sur X^{alg} tel que

- (i) pour tout $n \in \mathbf{N}$, chaque composante connexe du schéma $X_{[n]}^{\text{alg}}$ est semi-stable sur $\mathcal{O}_K$, pour un certain $t \in [0, n]$, avec t dépendant de la composante connexe de $X_{[n]}^{\text{alg}}$;
- (ii) pour tout $t \geq -1$, le morphisme

$$(3.3.10.1) \quad X_{[t+1]}^{\text{alg}} \rightarrow (\text{cosq}_t X_{\bullet \leq t}^{\text{alg}})_{t+1}$$

est projectif et surjectif.

Démonstration. Suivons le procédé inductif décrite dans [17, 6.2.5] pour la construction.

Définissons d'abord

$$X_{[-1]}^{\text{alg}} := X^{\text{alg}}.$$

Pour le prochain niveau : selon (3.3.9), il existe un morphisme projectif et surjectif $W \rightarrow X^{\text{alg}}$ avec W semi-stable sur $\mathcal{O}_{K_0}$ pour une extension finie K_0 de K . On peut supposer que $\zeta_p \in K_0$. Posons alors

$$X_{[0]}^{\text{alg}} := W.$$

avec la flèche $W \rightarrow X^{\text{alg}}$ comme ci-dessus. On obtient ainsi un objet simplicial 0-tronqué σ -scindé¹⁶ de $\text{Sch}_{\mathcal{O}_K}^{\text{adm}}$ augmenté

$$X_{[0]}^{\text{alg}} \rightarrow X_{[-1]}^{\text{alg}}.$$

Supposons qu'on ait construit $X_{\bullet \leq n}^{\text{alg}}$ un objet simplicial n -tronqué σ -scindé de $\text{Sch}_{\mathcal{O}_K}^{\text{adm}}$ augmenté sur X^{alg} tel que pour tout $t \in [0, n]$, chaque composante connexe de $X_{[t]}^{\text{alg}}$ est semi-stable sur $\mathcal{O}_{K_t'}$ pour un certain $t' \in [0, t]$, et que pour tout $t \in [-1, n-1]$, le morphisme (3.3.10.1) est projectif et surjectif. Notons

$$W := (\text{cosq}_n X_{\bullet \leq n}^{\text{alg}})_{n+1},$$

qui est encore séparé car le produit fibré et le produit, donc ainsi que les limites finies dans $\text{Sch}_{\mathcal{O}_K}^{\text{adm}}$, préservent la séparation. Il existe alors par (3.3.9) un morphisme projectif et surjectif $W' \rightarrow W$ avec W' semi-stable sur $\mathcal{O}_{K_{n+1}}$ pour une extension finie K_{n+1} de K_0 . On peut supposer que $\zeta_p \in K_{n+1}$. D'après [3, exposé V bis, proposition 5.1.3], il existe $X_{\bullet \leq n+1}^{\text{alg}}$ un objet simplicial $(n+1)$ -tronqué σ -scindé de $\text{Sch}_{\mathcal{O}_K}^{\text{adm}}$ étendant $X_{\bullet \leq n}^{\text{alg}}$ tel que $NX_{[n+1]}^{\text{alg}} \simeq W'$ ¹⁶. En particulier, $X_{[n+1]}^{\text{alg}}$ est la réunion disjointe de W' et d'autres schémas dont chaque composante connexe est semi-stable sur l'extension finie K_t de K contenant ζ_p pour certain $t \in [0, n]$. Le morphisme (3.3.10.1) pour $t = n$ est alors projectif et surjectif.

Par récurrence, on obtient un objet simplicial $X_{\bullet}^{\text{alg}} \in \text{Simp}(\text{Sch}_{\mathcal{O}_K}^{\text{adm}})$ vérifiant la condition (i) et (ii) dans l'énoncé. $\square$

3.3.11 - Corollaire. Soit X^{alg} un schéma de type fini séparé et plat sur $\mathcal{O}_K$ et soit $X_{\bullet}^{\text{alg}}$ vérifiant la conclusion de la proposition (3.3.10). Notons X (resp. $X_{\bullet}$) la fibre générique rigide de X^{alg} (resp. $X_{\bullet}^{\text{alg}}$). Alors $X_{\bullet}$ forme un hyperrecouvrement de X pour la v -topologie.

En plus, pour tout $n \in \mathbf{N}$, le morphisme $X_{[n]} \rightarrow X$ est projective.

Démonstration. En prenant la fibre générique rigide, on obtient un objet simplicial $X_{\bullet}$ de Rig_K augmenté sur X . C'est un hyperrecouvrement pour la v -topologie si et seulement si pour tout $t \geq -1$, le morphisme

$$(3.3.11.1) \quad X_{[t+1]} \rightarrow (\text{cosq}_t X_{\bullet \leq t})_{[t+1]}$$

est un recouvrement pour la v -topologie [35, Définition 3.5.4]¹⁷. Ceci est vrai car il est propre et surjectif par [31, Proposition 1.9.6, Lemma 3.7.3].

16. Nous renvoyons à [3, exposé V bis, définition 5.1.1] pour la notion d'être σ -scindé et la notation N (cf. aussi [17, §6.2], où la terminologie employé est « s -scindé » et $N(-)$).

17. Si on préfère la définition de la v -topologie pour les diamants [49], on obtiendra la même v -descente au final, puisque l'on a des homéomorphismes $|X_{[t]}| \simeq |X_{[t]}^{\circ}|$ et des équivalences de sites $(X_{[t]})_{\text{ét}} \simeq (X_{[t]}^{\circ})_{\text{ét}}$ par [49, Lemma 15.6], et que le foncteur diamond $(-)^{\circ} : \text{Rig}_K \rightarrow \mathbf{Diamant}$ commute aux produits fibrés par définition.

La dernière phrase de l'énoncé concernant le morphisme $X_{[n]} \rightarrow X$ s'ensuit des faits que la projectivité est stable par produits fibrés et que toute section d'un morphisme projectif est encore projective; voir la démonstration de [15, Corollary 4.14]. $\square$

Hyperdescente

3.3.12. (Hyperdescente) Soient $\mathcal{S}$ un site et $\mathcal{C}$ une ∞ -catégorie présentable. On dit qu'un préfaisceau $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{S}$ à valeurs dans $\mathcal{C}$ vérifie la descente (*resp.* l'hyperdescente), ou que $\mathcal{F}$ est un faisceau (*resp.* hyperfaisceau), si pour tout hyperrecouvrement de Čech (*resp.* tout hyperrecouvrement) $U_\bullet \rightarrow U$ dans $\mathcal{S}$, la flèche naturelle

$$\mathcal{F}(U) \rightarrow \lim_{\Delta} \mathcal{F}(U_\bullet)$$

est une équivalence. Notons $\mathrm{Shv}(\mathcal{S}, \mathcal{C})$ (*resp.* $\mathrm{Shv}^{\mathrm{hyp}}(\mathcal{S}, \mathcal{C})$) la ∞ -catégorie des faisceaux (*resp.* sa sous-catégorie pleine des hyperfaisceaux) sur $\mathcal{S}$ à valeurs dans $\mathcal{C}$. Par exemple, pour $\mathcal{C} = \mathrm{Spc}$, tout faisceau tronqué est un hyperfaisceau [40, Lemma 6.5.2.9]¹⁸, ainsi pour tout faisceau d'ensembles (ou de groupes abéliens) $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{S}$, le préfaisceau $U \mapsto R\Gamma(U, \mathcal{F}|_U)$ est un hyperfaisceau.

En particulier, pour tout diamant Y (par exemple pour $Y = X^\circ$ avec $X \in \mathrm{Rig}_K$ [49, Lemma 15.6]) et pour tout faisceau de groupes abéliens $\mathcal{F}$ sur $Y_{\mathrm{\acute{e}t}}$, le préfaisceau $R\Gamma((-)_v, \nu_Y^* \mathcal{F})$ vérifie la v -hyperdescente pour les diamants, où l'on dénote par ν_Y le morphisme de sites $Y_v \rightarrow Y_{\mathrm{\acute{e}t}}$. En effet, soit $Y_\bullet$ un hyperrecouvrement de Y par des diamants dans Y_v ; on a $R\Gamma(Y_{\bullet, \mathrm{\acute{e}t}}, \pi_\bullet^* \mathcal{F}) \simeq R\Gamma(Y_{\bullet, v}, \nu_{Y_\bullet}^* \pi_\bullet^* \mathcal{F}) \simeq R\Gamma(Y_{\bullet, v}, \pi_\bullet^* \nu_Y^* \mathcal{F})$ selon [49, Section 14]. En plus, on sait que $R\Gamma((-)_v, \nu_Y^* \mathcal{F})$ vérifie la v -hyperdescente d'après ce qui précède, car $\nu_Y^* \mathcal{F}$ est un faisceau sur Y_v .

3.3.13 - Proposition. Soit X un espace rigide sur K avec un hyperrecouvrement $X_\bullet$ par des espaces rigides sur K . Supposons qu'il existe une immersion ouverte $X \subset \overline{X}$ avec $\overline{X}$ un espace rigide propre sur K , et que $X_\bullet$ provient par restriction d'un hyperrecouvrement $\overline{X}_\bullet$ de $\overline{X}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le morphisme $\overline{\pi}_n: \overline{X}_{[n]} \rightarrow \overline{X}$ soit propre. Alors pour tout faisceau de groupes abéliens $\mathcal{F}$ sur $X_{\mathrm{\acute{e}t}}$, la flèche naturelle

$$R\Gamma_{\mathrm{\acute{e}t}, c}(X, \mathcal{F}) \rightarrow R\lim_{\Delta} R\Gamma_{\mathrm{\acute{e}t}, c}(X_\bullet, \pi_\bullet^* \mathcal{F})$$

est une équivalence.

Démonstration. Les morphismes propres π_n induisent des morphismes compatibles

$$R\Gamma_{\mathrm{\acute{e}t}, c}(X, \mathcal{F}) \rightarrow R\Gamma_{\mathrm{\acute{e}t}, c}(X, \pi_{n*} \pi_n^* \mathcal{F}) \simeq R\Gamma_{\mathrm{\acute{e}t}, c}(X, \pi_{n!} \pi_n^* \mathcal{F}) \simeq R\Gamma_{\mathrm{\acute{e}t}, c}(X_{[n]}, \pi_n^* \mathcal{F}),$$

fournissant ainsi la flèche naturelle dans l'énoncé. Par ailleurs, les composés

$$R\Gamma_{\mathrm{\acute{e}t}, c}(X, \mathcal{F}) \simeq R\Gamma_{\mathrm{\acute{e}t}}(\overline{X}, j_! \mathcal{F}) \rightarrow R\Gamma_{\mathrm{\acute{e}t}}(\overline{X}, \overline{\pi}_{n*} \overline{\pi}_n^* j_! \mathcal{F}) \simeq R\Gamma_{\mathrm{\acute{e}t}}(\overline{X}, \overline{\pi}_{n*} j_{n!} \pi_n^* \mathcal{F}) \simeq R\Gamma_{\mathrm{\acute{e}t}}(\overline{X}_{[n]}, j_{n!} \pi_n^* \mathcal{F})$$

définissent les mêmes morphismes (à une homotopie près)¹⁹.

Pour montrer l'équivalence, notons $j: X \rightarrow \overline{X}$ l'immersion ouverte dans l'énoncé et par j_n son change-

18. La notion d'hypercomplétude est définie juste avant le lemme cité, et il s'avère [40, Theorem 6.5.3.12] qu'il s'agit aussi de la descente par rapport aux hyperrecouvrements.

19. En effet, il suffit de remarquer le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc} R\Gamma_{\mathrm{\acute{e}t}, c}(X, \mathcal{F}) & \longrightarrow & R\Gamma_{\mathrm{\acute{e}t}, c}(X, \pi_{n*} \pi_n^* \mathcal{F}) & \simeq & R\Gamma_{\mathrm{\acute{e}t}, c}(X, \pi_{n!} \pi_n^* \mathcal{F}) & \simeq & R\Gamma_{\mathrm{\acute{e}t}, c}(X_{[n]}, \pi_n^* \mathcal{F}) \\ \wr & & \wr & & \wr & & \\ R\Gamma_{\mathrm{\acute{e}t}}(\overline{X}, j_! \mathcal{F}) & \longrightarrow & R\Gamma_{\mathrm{\acute{e}t}}(\overline{X}, j_! \pi_{n*} \pi_n^* \mathcal{F}) & \simeq & R\Gamma_{\mathrm{\acute{e}t}}(\overline{X}, j_! \pi_{n!} \pi_n^* \mathcal{F}) & & \wr \\ & \searrow & & & \wr & & \\ & & R\Gamma_{\mathrm{\acute{e}t}}(\overline{X}, \overline{\pi}_{n*} \overline{\pi}_n^* j_! \mathcal{F}) & \simeq & R\Gamma_{\mathrm{\acute{e}t}}(\overline{X}, \overline{\pi}_{n*} j_{n!} \pi_n^* \mathcal{F}) & \simeq & R\Gamma_{\mathrm{\acute{e}t}}(\overline{X}_{[n]}, j_{n!} \pi_n^* \mathcal{F}). \end{array}$$

ment de base vers le niveau $[n] \in \Delta$. On a

$$\begin{aligned} R\Gamma_{\text{ét},c}(X, \mathcal{F}) &\simeq R\Gamma_{\text{ét}}(\overline{X}, j_! \mathcal{F}) \\ &\simeq R \lim_{[n] \in \Delta} R\Gamma_{\text{ét}}(\overline{X}_{[n]}, \overline{\pi}_n^* j_! \mathcal{F}) \\ &\simeq R \lim_{[n] \in \Delta} R\Gamma_{\text{ét}}(\overline{X}_{[n]}, j_{n!} \pi_n^* \mathcal{F}) \\ &\simeq R \lim_{[n] \in \Delta} R\Gamma_{\text{ét},c}(X_{[n]}, \pi_n^* \mathcal{F}) \end{aligned}$$

où le deuxième isomorphisme vient de la v -hyperdescente (3.3.12) pour la cohomologie étale. $\square$

Démontrons maintenant le théorème principal de cet article.

3.3.14 - Théorème. *Soit $U \subset^\dagger X$ une inclusion ouverte stricte de courbes affinoïdes rigides sur K . Alors pour tous $n, m \in \mathbf{N}$, les applications induites $H_{\text{ét}}^n(X, \mathbf{Z}/p^m) \rightarrow H_{\text{ét}}^n(U, \mathbf{Z}/p^m)$ et $H_{\text{ét},c}^n(U, \mathbf{Z}/p^m) \rightarrow H_{\text{ét},c}^n(X, \mathbf{Z}/p^m)$ sont d'image finie.*

Démonstration. Fixons un $n \in \mathbf{N}$. On se réduit au cas $m = 1$ comme dans l'étape (i) de la preuve du théorème (3.2.5). Supposons désormais que $m = 1$.

Posons

$$r := (n+1)(\dim X + 2) = 3(n+1).$$

Par l'hypothèse de l'inclusion stricte, on peut prolonger $U \subset X$ en une chaîne d'ouverts admissibles quasi-compacts

$$(3.3.14.1) \quad U \subset X(\delta_1) \subset^\dagger X(\delta_2) \subset^\dagger \cdots \subset^\dagger X(\delta_r) \subset^\dagger X(\delta_{r+1}) = X$$

avec $0 < \delta_1 < \cdots < \delta_{r+1} = 1$.

Supposons d'abord que X est lisse sur K . Par (3.3.1), il existe un schéma algébrique X^{alg} de type fini (séparé) et plat sur $\mathcal{O}_K$ et une compactification projective $\overline{X^{\text{alg}}}$ de X^{alg} sur $\mathcal{O}_K$ tels que la chaîne d'inclusions (3.3.14.1) est induite par une chaîne

$$\mathcal{U} \subset \mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{U}_r \subset \mathcal{U}_{r+1} = \mathfrak{X} := (X^{\text{alg}})_p^\wedge \subset \overline{\mathfrak{X}} := (\overline{X^{\text{alg}}})_p^\wedge$$

d'ouverts quasi-compacts du schéma formel admissible projectif $\overline{\mathfrak{X}}$ sur $\mathcal{O}_K$. Soit $\overline{X^{\text{alg}}}_\bullet$ un objet simplicial dans $\text{Sch}_{\mathcal{O}_K}^{\text{adm}}$ augmenté sur X^{alg} donné par la proposition (3.3.10). Ensuite, posons

$$\overline{\mathfrak{X}}_\bullet := (\overline{X^{\text{alg}}}_\bullet)_p^\wedge.$$

L'objet simplicial

$$\overline{X}_\bullet := (\overline{\mathfrak{X}}_\bullet)_\eta$$

est un hyperrecouvrement de $\overline{X}$ dans Rig_K pour la v -topologie (3.3.11). Par changement de base, on obtient des morphismes simpliciaux

$$\mathcal{U}_\bullet \subset (\mathcal{U}_1)_\bullet \subset (\mathcal{U}_2)_\bullet \subset \cdots \subset (\mathcal{U}_r)_\bullet \subset (\mathcal{U}_{r+1})_\bullet = \mathfrak{X}_\bullet \subset \overline{\mathfrak{X}}_\bullet$$

induisant aux fibres génériques (les inclusions strictes étant préservées par le changement de base propre [31, Lemma 1.10.17, iii), iv)])

$$U_\bullet \subset (U_1)_\bullet \subset^\dagger (U_2)_\bullet \subset^\dagger \cdots \subset^\dagger (U_r)_\bullet \subset^\dagger (U_{r+1})_\bullet = X_\bullet \subset \overline{X}_\bullet$$

qui sont respectivement des hyperrecouvrements de (3.3.14.1). D'après la v -hyperdescente (3.3.12) resp. (3.3.13),

on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & R\Gamma_{\text{ét}}(U_{t+1}, \mathbf{F}_p) & \longrightarrow & R\Gamma_{\text{ét}}(U_t, \mathbf{F}_p) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \\ \cdots & \longrightarrow & R\lim_{\Delta} R\Gamma_{\text{ét}}((U_{t+1})_{\bullet}, \mathbf{F}_p) & \longrightarrow & R\lim_{\Delta} R\Gamma_{\text{ét}}((U_t)_{\bullet}, \mathbf{F}_p) & \longrightarrow & \cdots, \end{array}$$

resp. le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & R\Gamma_{\text{ét},c}(U_t, \mathbf{F}_p) & \longrightarrow & R\Gamma_{\text{ét},c}(U_{t+1}, \mathbf{F}_p) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \\ \cdots & \longrightarrow & R\lim_{\Delta} R\Gamma_{\text{ét},c}((U_t)_{\bullet}, \mathbf{F}_p) & \longrightarrow & R\lim_{\Delta} R\Gamma_{\text{ét},c}((U_{t+1})_{\bullet}, \mathbf{F}_p) & \longrightarrow & \cdots, \end{array}$$

où la seconde ligne est la limite simpliciale des morphismes

$$\cdots \rightarrow R\Gamma_{\text{ét}}((U_{t+1})_{\bullet}, \mathbf{F}_p) \rightarrow R\Gamma_{\text{ét}}((U_t)_{\bullet}, \mathbf{F}_p) \rightarrow \cdots,$$

resp. des morphismes

$$\cdots \rightarrow R\Gamma_{\text{ét},c}((U_t)_{\bullet}, \mathbf{F}_p) \rightarrow R\Gamma_{\text{ét},c}((U_{t+1})_{\bullet}, \mathbf{F}_p) \rightarrow \cdots.$$

Enfin, posons $l := \dim X + 2 = 3$. D'après la proposition (3.1.8), à chaque niveau $[n] \in \Delta$, pour tout $m \in \mathbf{N}$ et tout $t \in [1, r+1-l]$, l'application

$$H_{\text{ét}}^m((U_{t+1})_{[n]}, \mathbf{F}_p) \rightarrow H_{\text{ét}}^m((U_t)_{[n]}, \mathbf{F}_p) \quad \text{resp.} \quad H_{\text{ét},c}^m((U_t)_{[n]}, \mathbf{F}_p) \rightarrow H_{\text{ét},c}^m((U_{t+1})_{[n]}, \mathbf{F}_p)$$

est d'image finie. Il résulte alors du lemme (1.1.10) que pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $t \in [1, r+1-(n+1)l]$, l'application

$$H_{\text{ét}}^n(X(\delta_{t+(n+1)l}), \mathbf{F}_p) \rightarrow H_{\text{ét}}^n(X(\delta_t), \mathbf{F}_p) \quad \text{resp.} \quad H_{\text{ét},c}^n(X(\delta_t), \mathbf{F}_p) \rightarrow H_{\text{ét},c}^n(X(\delta_{t+(n+1)l}), \mathbf{F}_p)$$

est d'image finie.

Pour finir, il reste à traiter le cas général où X n'est plus nécessairement lisse. Il se réduit de manière similaire (par hyperdescente) au cas de X lisse, grâce au résultat de désingularisation fonctorielle de Temkin pour les espaces analytiques rigides quasi-compacts [53, Theorem 5.2.2]. $\square$

3.3.15 - Corollaire. *Si la proposition (3.1.6) vaut en dimension d , alors il en est de même pour le théorème (3.3.14).*

Démonstration. Ceci découle de la preuve du théorème, où l'on s'est réduit au cas semi-stable afin de pouvoir appliquer, à la tout dernière étape, la proposition (3.1.8), laquelle est à son tour impliquée par la proposition (3.1.6) d'après (3.1.9). $\square$

A Cas de Stein à réduction semi-stable

Sans avoir pu établir la conjecture (0.6) dans toute sa généralité, on ne peut pas en déduire la profinitude pour un espace Stein lisse arbitraire de dimension > 1 sur K . Cependant, si l'on dispose d'un modèle formel semi-stable *Stein* global au sens suivant, on aura également la profinitude.

A.1 - Définition ([13, 3.1.1]). On dit qu'un espace rigide X sur K est *Stein à réduction semi-stable* $\mathfrak{X}$ si $\mathfrak{X}$ est un modèle formel (strictement) semi-stable de X sur $\mathcal{O}_K$ dont la fibre spéciale $Y := \mathfrak{X}_s$ admet une famille de sous-schémas fermés $\{Y_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ et une famille de sous-schémas ouverts $\{V_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ tels que

- (i) Y_i est une réunion finie de composantes irréductibles de Y pour tout $i \in \mathbf{N}$,
- (ii) $Y_i \subset V_i \subset Y_{i+1}$ et $Y = \bigcup_i Y_i = \bigcup_i V_i$,
- (iii) la famille de tubes $\{]V_i[_{\mathfrak{X}}\}_{i \in \mathbf{N}}$ est un recouvrement Stein de X , c'est-à-dire (2.1.2, ii), on a des inclusions strictes $]V_i[_{\mathfrak{X}} \subset]V_{i+1}[_{\mathfrak{X}}$ et que $X = \bigcup_i]V_i[_{\mathfrak{X}}$.

Soit $i \in \mathbf{N}$. Comme V_i est un ouvert de Y_i , la tube $]V_i[_{\mathfrak{X}}$ est la fibre générique (rigide) du sous-schéma formel ouvert $]V_i[_{\mathfrak{X}}$ de $\mathfrak{X}$ de support V_i .

A.2 - Proposition. *Soit X un espace rigide de dimension d sur K qui est Stein à réduction semi-stable $\mathfrak{X}$. Supposons que $\zeta_p \in K$. Alors le groupe abélien condensé $H_{\text{ét}}^n(X, \mathbf{F}_p)$ est profini pour tout $n \in \mathbf{N}$.*

L'énoncé s'inspire de la preuve de [14, théorème 2.1] et ne se limite pas à la dimension 1, bien que la conclusion soit plus faible que *loc. cit.*. En effet, ce dernier traite le cas où X est un espace symétrique p -adique figurant dans la tour de Drinfeld en dimension 1, de sorte que le groupe profini $H_{\text{ét}}^n(X, \mathbf{F}_p)$ est en outre muni d'une action continue du groupe $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Le résultat *loc. cit.* porte davantage sur une certaine propriété de finitude liée à cette action.

Démonstration. La clef se trouve au fait que l'on dispose d'une chaîne infinie d'inclusions strictes à réduction semi-stable sur une extension finie fixée K de $\mathbf{Q}_p$, qui est en particulier de longueur $\geq 2e'(d+3)$, ce qui nous suffira.

Comme $\zeta_p \in K$, on a $\mathbf{F}_p \simeq \mu_p^{\otimes q}$ sur $X_{\text{ét}}$ pour tout $q \in \mathbf{N}$. Conservons les notations V_n et Y_n comme dans la définition précédente pour X Stein à réduction semi-stable. Notons $U_i :=]V_i[_{\mathfrak{X}}$.

Selon la définition (A.1) et le corollaire (3.1.3), les adhérences schématiques $\overline{U_i}$ dans Y sont propres sur k . Ainsi, d'après (3.1.4.3), les applications

$$(A.2.1) \quad H_{\text{ét}}^n(U_{i+1}, \mathcal{F}|_{U_{i+1}}) \rightarrow H_{\text{ét}}^n(U_i, \mathcal{F}|_{U_i})$$

sont d'image finie pour tous $n, i \in \mathbf{N}$ et pour tout faisceau étale $\mathcal{F}$ sur Y qui est soit cohérent soit constructible ; en effet, ces morphismes se factorise par $H_{\text{ét}}^n(\overline{U_i}, \mathcal{F}'|_{\overline{U_i}})$, où $\mathcal{F}' = \text{im}(\mathcal{F}|_{U_{i+1}} \rightarrow j_{i*} j_i^* \mathcal{F}|_{U_{i+1}})$ avec $j_i : U_i \rightarrow U_{i+1}$ l'immersion ouverte canonique. Si $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent, alors les $\mathcal{F}'_i$ sont cohérents à support dans $\overline{U_i}$ par (3.1.4.3). Si $\mathcal{F}$ est constructible, alors $\mathcal{F}'_i$ est constructible en étant un quotient de $\mathcal{F}$, et est à support dans $\overline{U_i}$. La finitude souhaitée découle alors de la finitude cohomologique étale pour un morphisme propre dans chacun des deux cas (voir la note de bas de page, p. 24).

En particulier, lorsque $\mathcal{F}$ est un des gradués $\text{gr}_i^m = \text{gr}_i^m(R^q \lambda_* \mathbf{F}_p)$ de la filtration de Bloch-Kato-Hyodo sur les cycles proches rigides (1.2.3), où $0 \leq m < e'$, $i \in \{0, 1\}$ et $q \in \mathbf{N}$, on obtient que les applications (A.2.1) sont d'image finie. La longueur de la filtration sur $R^q \lambda_* \mathbf{F}_p$ étant $2e'$, on peut appliquer $2e' - 1$ fois le lemme (1.1.4) pour déduire que les applications

$$H_{\text{ét}}^n(V_{i+2e'}, R^q \lambda_* \mathbf{F}_p) \rightarrow H_{\text{ét}}^n(V_i, R^q \lambda_* \mathbf{F}_p), \quad n, i, q \in \mathbf{N}$$

sont d'image finie. Alors, en utilisant les suites spectrales

$$E_2^{r,s} = H_{\text{ét}}^r(V_i, R^s \lambda_* \mathbf{F}_p) \implies H_{\text{ét}}^{r+s}(U_i, \mathbf{F}_p),$$

concentrées aux degrés $s \in [0, d+2]$ (3.2.6) et compatibles pour $i \in \mathbf{N}$, et en appliquant $d+2$ fois le lemme (1.1.4), on conclut que les applications

$$H_{\text{ét}}^n(U_{i+2e'(d+3)}, \mathbf{F}_p) \rightarrow H_{\text{ét}}^n(U_i, \mathbf{F}_p), \quad n, i \in \mathbf{N}$$

sont d'image finie. La profinitude en résulte par (2.1.6.2). □

Références

- [1] Piotr Achinger, Marcin Lara et Alex Youcis : Geometric arcs and fundamental groups of rigid spaces. *J. reine angew. Math.*, 799 :57-107, 2023.
- [2] Johannes Anschütz et Lucas Mann : Descent for solid quasi-coherent sheaves on perfectoid spaces, 2024. Preprint, available at <https://arxiv.org/abs/2403.01951v2>.

- [3] Michael Artin, Alexander Grothendieck et Jean-Louis Verdier : Théorie des Topos et Cohomologie Etale des Schémas. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963-1964 (SGA 4) : Tomes 1, 2, 3. *Lect. Notes in Math*, 269, 270, 305, 1973.
- [4] Vladimir Berkovich : Complex analytic vanishing cycles for formal schemes, 2015. Preprint, available at https://www.wisdom.weizmann.ac.il/~vova/FormIV_2015.pdf.
- [5] Bhargav Bhatt et David Hansen : The six functors for zariski-constructible sheaves in rigid geometry. *Compositio Mathematica*, 158(2) :437482, 2022.
- [6] Bhargav Bhatt et Akhil Mathew : The arc-topology. *Duke Mathematical Journal*, 170(9) :1899–1988, 2021.
- [7] Bhargav Bhatt et Peter Scholze : The pro-étale topology for schemes. *Astérisque*, pages 99–201, 2015.
- [8] Spencer Bloch et Kazuya Kato : p -adic étale cohomology. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 63 :107–152, 1986.
- [9] Siegfried Bosch : *Lectures on formal and rigid geometry*. Springer, 2005.
- [10] Siegfried Bosch et Werner Lütkebohmert : Stable reduction and uniformization of abelian varieties i. *Mathematische Annalen*, 270 :349–380, 1985.
- [11] Guido Bosco : On the p -adic pro-étale cohomology of Drinfeld symmetric spaces, 2023. Preprint, available at <https://arxiv.org/abs/2110.10683v2>.
- [12] Dustin Clausen et Peter Scholze : Lectures on Condensed Mathematics, 2019. Preprint, available at <https://www.math.uni-bonn.de/people/scholze/Condensed.pdf>.
- [13] Pierre Colmez, Gabriel Dospinescu et Wiesława Nizioł : Cohomology of p -adic Stein spaces. *Invent. Math.*, 219(3) :873–985, 2020.
- [14] Pierre Colmez, Gabriel Dospinescu et Wiesława Nizioł : Factorisation de la cohomologie étale p -adique de la tour de drinfeld. In *Forum of Mathematics, Pi*, volume 11, page e16. Cambridge University Press, 2023.
- [15] Brian Conrad : Cohomological descent, 2003.
- [16] Brian Conrad : Relative ampleness in rigid geometry. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 56(4) :1049–1126, 2006.
- [17] Pierre Deligne : Théorie de Hodge : III. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 44 :5–77, 1974.
- [18] Jean-Pierre Demailly : Complex analytic and differential geometry, 2012. E-book, available at the author's webpage <https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/manuscripts/agbook.pdf>, version dated 21 June 2012.
- [19] Vladimir G. Drinfel'd : Coverings of p -adic symmetric domains. *Funkcional. Anal. i Priložen.*, 10(2) :29–40, 1976.
- [20] Antoine Ducros : Les espaces de Berkovich sont excellents. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 59(4) :1443–1552, 2009.
- [21] Antoine Ducros : Families of Berkovich spaces. *Astérisque*, pages vii+262, 2018.
- [22] Antoine Ducros : La structure des courbes analytiques, 2024. Preprint, available at <https://arxiv.org/abs/2405.10619v1>.
- [23] Ofer Gabber et Bogdan Zavyalov : Algebraization Techniques and Rigid-Analytic Artin-Grothendieck Vanishing, 2024. Preprint, available at <https://arxiv.org/abs/2402.08741v2>.
- [24] Alain Genestier : *Espaces symétriques de Drinfeld*. Numéro 234 de Astérisque. Société mathématique de France, 1996.
- [25] Elmar Grosse-Klönne : Rigid analytic spaces with overconvergent structure sheaf. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 2000(519) :73–95, 2000.
- [26] Alexander Grothendieck : Éléments de géométrie algébrique : I. Le langage des schémas. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 4 :5–228, 1960.
- [27] Alexander Grothendieck : Éléments de géométrie algébrique : II. Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 8 :5–222, 1961.
- [28] Alexander Grothendieck : Éléments de géométrie algébrique : III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents, Première partie. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 11 :5–167, 1961.

- [29] Alexander Grothendieck : Éléments de géométrie algébrique : IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Seconde partie. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 24 :5–231, 1965.
- [30] David Hansen : Vanishing and comparison theorems in rigid analytic geometry. *Compositio Mathematica*, 156(2) :299–324, 2020.
- [31] Roland Huber : *Étale cohomology of rigid analytic varieties and adic spaces*, volume E30. Wiesbaden : Vieweg, 1996.
- [32] Osamu Hyodo : A note on p -adic étale cohomology in the semistable reduction case. *Invent. Math.*, 91(3) :543–557, 1988.
- [33] Kazuya Kato : Logarithmic structures of Fontaine–Illusie. In *Algebraic analysis, geometry, and number theory : proceedings of the JAMI inaugural conference, held at Baltimore, MD, USA, May 16-19, 1988*, pages 191–224. Baltimore : Johns Hopkins University Press, 1989.
- [34] Kazuya Kato : Logarithmic Structures of Fontaine–Illusie. II — Logarithmic Flat Topology. *Tokyo Journal of Mathematics*, 44(1) :125 – 155, 2021.
- [35] Kiran S. Kedlaya et Ruochuan Liu : Relative p -adic Hodge theory, II : Imperfect period rings, 2019. Preprint, available at <https://arxiv.org/abs/1602.06899v3>.
- [36] Ursula Köpf : Über eigentliche Familien algebraischer Varietäten über affinoiden Räumen. *Schr. Math. Inst. Univ. Münster* (2), pages iv+72, 1974.
- [37] Shizhang Li, Emanuel Reinecke et Bogdan Zavyalov : Relative Poincaré duality in nonarchimedean geometry, 2024. Preprint, available at <https://arxiv.org/abs/2410.08200v1>.
- [38] Stanislaw Łojasiewicz : Triangulation of semi-analytic sets. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Scienze Fisiche e Matematiche*, Ser. 3, 18(4) :449–474, 1964.
- [39] Lucas Mann : *A p -Adic 6-Functor Formalism in Rigid-Analytic Geometry*. Thèse de doctorat, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, août 2022.
- [40] Jacob Lurie : *Higher Topos Theory*. Princeton University Press, 2009.
- [41] Jacob Lurie : Higher Algebra, 2016. Preprint, available at <https://www.math.ias.edu/~lurie/papers/HA.pdf>, version dated 18 September 2017.
- [42] Werner Lütkebohmert : Formal-algebraic and rigid-analytic geometry. *Mathematische Annalen*, 286 :341–371, 1990.
- [43] Werner Lütkebohmert : Riemann’s existence problem for a p -adic field. *Inventiones mathematicae*, 111(1) : 309–330, 1993.
- [44] Hideyuki Matsumura : *Commutative algebra. 2nd ed*, volume 56 de *Math. Lect. Note Ser.* The Benjamin/Cummings Publishing Company, Reading, MA, 1980.
- [45] Wiesława Nizioł : Toric singularities : log-blow-ups and global resolutions. *Journal of algebraic geometry*, 15(1) :1–29, 2006.
- [46] Shuji Saito et Kanetomo Sato : On p -adic vanishing cycles of log smooth families. *Tunisian Journal of Mathematics*, 2(2) :309–335, 2019.
- [47] Takeshi Saito : Log smooth extension of a family of curves and semi-stable reduction. *Journal of Algebraic Geometry*, 13(2) :287–322, 2004.
- [48] Peter Scholze : p -adic Hodge theory for rigid-analytic varieties. *Forum Math. Pi*, 1 :77, 2013.
- [49] Peter Scholze : Étale cohomology of diamonds, 2022. Preprint, available at <https://arxiv.org/abs/1709.07343v3>.
- [50] Jean-Pierre Serre : *Représentations linéaires des groupes finis*. Hermann, Paris, revised édition, 1978.
- [51] Jean-Pierre Serre : *Cohomologie galoisienne*, volume 5 de *Lect. Notes Math.* Berlin : Springer-Verlag, 5ème éd., rév. et complété édition, 1994.
- [52] The Stacks Project Authors : *Stacks Project*. <https://stacks.math.columbia.edu>, 2018.
- [53] Michael Temkin : Functorial desingularization of quasi-excellent schemes in characteristic zero : the nonembedded case. *Duke Mathematical Journal*, 161(11) :2207 – 2254, 2012.

- [54] Michael Temkin : Altered local uniformization of Berkovich spaces. *Israel Journal of Mathematics*, 221(2) : 585–603, 2017.
- [55] Michael Temkin : Tame distillation and desingularization by p -alterations. *Annals of Mathematics*, 186(1) : 97–126, 2017.
- [56] Michael Temkin : Functorial desingularization over $\mathbf{Q}$: boundaries and the embedded case. *Israel J. Math.*, 224(1) :455–504, 2018.
- [57] Takeshi Tsuji : p -adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case. *Inventiones mathematicae*, 137(2) :233–411, 1999.
- [58] Takeshi Tsuji : On the p -adic nearby cycles of log smooth families. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 128(4) :529–575, 2000.
- [59] Hassler Whitney : *Geometric Integration Theory*. Princeton University Press, Princeton, 1957.