

Profinitude de la cohomologie étale mod p pour les courbes partiellement propres

Yicheng Zhou

23 août 2024

Résumé

Nous démontrons que l'application de groupes de cohomologie étale à coefficients dans \mathbf{F}_p entre deux courbes affinoïdes rigides sur une extension finie K de \mathbf{Q}_p , l'une strictement incluse dans l'autre, est d'image finie. Comme corollaire, nous obtenons la profinitude des groupes de cohomologie étale pour les faisceaux constructibles de Zariski sur les courbes rigides partiellement propres sur K . Nous obtenons aussi des résultats parallèles pour la cohomologie étale à support compact.

Table des matières

0	Introduction	1
1	Préliminaires	2
2	Conséquences de la conjecture	8
3	Cas des modèles semi-stables d'une stricte inclusion	16
4	Cas des courbes lisses	23
5	Cas des courbes générales	26
A	Cas de Stein à réduction semi-stable	32

0 Introduction

0.1. Notation et convention. Fixons un nombre premier p . Soit K une extension finie de \mathbf{Q}_p d'anneau des entiers \mathcal{O}_K et de corps résiduel $k = \mathbf{F}_q$ sauf mention expresse du contraire.

Sauf mention contraire, la cohomologie étale des espaces rigides (analytiques) sur K sera considérée au sens de Huber [20].

Un espace rigide de dimension 1 sur K sera appelé une *courbe* sur K .

0.2. Nous nous intéressons à la finitude des groupes de cohomologie étale à coefficients dans \mathbf{F}_p des espaces rigides propres sur une extension finie K de \mathbf{Q}_p . Ceci découle d'une part du théorème de comparaison primitif de Scholze [33, Theorem 5.1] et de la suite spectrale de Hochschild-Serre par la finitude de la dimension

cohomologique de K [22, Theorem 4.1]. La démonstration de ce premier résultat repose pourtant fortement sur le passage des systèmes locaux aux $\mathcal{O}_X^+/\mathfrak{p}$ -modules quasi-cohérents, pour lesquels il y a une forte théorie à savoir un formalisme des six foncteurs [24]. D'autre part, on a la profinitude des groupes de cohomologie étale à coefficients dans \mathbf{F}_p pour les espaces de Stein à réduction semi-stables, essentiellement démontrée par Colmez, Dospinescu et Niziol [6, Théorème 2.1], cf. (A.2).

Une interpolation entre ces deux résultats, la finitude d'un côté pour les espaces rigides propres et la profinitude de l'autre côté pour les espaces rigides de Stein, semblerait une profinitude des systèmes de groupes de cohomologie étale pour une suite strictement croissante d'ouverts quasi-compacts (ou simplement d'ouverts affinoïdes).

Nous pourrions envisager une finitude de $H_{\text{ét}}^n(\overline{X}, \mathbf{F}_p)$ pour $j : X \rightarrow \overline{X}$ la compactification universelle d'un espace rigide affinoïde X sur K à la Huber [20, Theorem 5.1.5]. Pourtant, ceci est faux, puisque le faisceau étale $R^m j_* j^* \mathcal{F}$ s'annule pour $m > 0$ pour tout faisceau étale *surconvergent* \mathcal{F} sur \overline{X} selon [20, Proposition 8.1.2, (ii)]; en particulier, pour le faisceau constant \mathbf{F}_p , on a $H_{\text{ét}}^n(\overline{X}, \mathbf{F}_p) \xrightarrow{\cong} H_{\text{ét}}^n(X, \mathbf{F}_p)$, qui est monstrueusement gigantesque.

Ainsi, la finitude de l'image que nous allons montrer ne semble pas être incarnée dans la finitude de certain objet géométrique ne dépendant que de l'affinoïde intérieur; plus l'affinoïde extérieur s'en approche, plus grande est l'image de l'application de groupes de cohomologie. Ceci conduit à la conjecture suivante :

0.3 - Conjecture. *Soit $U \subset^\dagger X$ une inclusion ouverte stricte d'affinoïdes rigides de dimension d sur K . Alors pour tous $n, m \in \mathbf{N}$, les applications induites $H_{\text{ét}}^n(X, \mathbf{Z}/\mathfrak{p}^m) \rightarrow H_{\text{ét}}^n(U, \mathbf{Z}/\mathfrak{p}^m)$ et $H_{\text{ét},c}^n(U, \mathbf{Z}/\mathfrak{p}^m) \rightarrow H_{\text{ét},c}^n(X, \mathbf{Z}/\mathfrak{p}^m)$ sont d'image finie.*

Nous allons démontrer cette finitude *seulement en dimension 1*, autrement dit, *pour les courbes*, cf. le théorème (5.13), tout en ignorant le cas de dimension supérieure. Nous obtiendrons ainsi, sans faire intervenir des modèles semi-stables *global*, une autre preuve d'une version affaiblie de [6, Théorème 2.1], qui suffirait pour son application arithmétique.

0.4. Avant d'en parler de la preuve, signalons d'abord quelques conséquences de la conjecture (cf. Section 2). D'une part, la conjecture en dimension d impliquerait la profinitude du groupe de cohomologie étale d'un espace rigide partiellement propre de dimension d sur K , qui serait la limite projective des groupes de cohomologie étale d'une suite d'ouverts quasi-compacts strictement croissante dont la réunion est l'espace total. D'autre part, si la conjecture était vraie en toute dimension $\leq d$, alors un dévissage due à Hansen [19] permettrait d'en déduire la conjecture pour tout coefficients constructibles de Zariski.

0.5. Concernant la preuve, nous en donnerons deux, l'une dans le cas lisse (cf. Section 4) et l'autre dans le cas général (cf. Section 5), bien qu'elles suivent la même ligne : étudier le cas de réduction semi-stable (Section 3), et y ramener dans le cas général. La première étape se restreint fortement aux *courbes*, alors que la deuxième, malgré le théorème de réduction semi-stable pour les courbes, peut se réaliser en dimension quelconque grâce à la résolution des singularités en mixte caractéristique due à Temkin (et à Saito).

Remerciement. L'auteur remercie sincèrement Wiesława Niziol pour tout son soutien et encourage ainsi que les discussions envers ce projet.

1 Préliminaires

Applications d'image finie

1.1. (i) On dit qu'une application d'ensemble est *d'image finie* si son image est un ensemble fini (donc un groupe fini).

(ii) Soit $\{A_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ un système projectif de groupes abéliens. On dit qu'il est *profini* si pour tout $i \in \mathbf{N}$, l'application $A_{i+1} \rightarrow A_i$ est d'image finie. On dit qu'il est *essentiellement profini* s'il existe un système $\{A'_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ profini entretenant $\{A_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ quitte à extraire une sous-ensemble d'indices de \mathbf{N} , ou ce qui revient au même, s'il existe un système $\{A'_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ entretenant $\{A_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ (quitte à extraire une sous-ensemble d'indices de \mathbf{N}) avec A'_i des groupes abéliens finis. Tout système profini est essentiellement profini.

1.2 - Lemma. *Si $\{A_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ est un système projectif de groupes abéliens essentiellement profini, alors $R^1 \lim_i A_i = 0$.*

Démonstration. C'est parce que le système $\{A_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ vérifie la condition de Mittag-Leffler. □

1.3 - Lemma. *Soit $(f_i)_{i \in \mathbf{N}} : \{A_i\}_{i \in \mathbf{N}} \rightarrow \{B_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ un morphisme de systèmes projectifs de groupes abéliens. Si les morphismes successifs de ces deux systèmes sont tous d'image finie (c'est-à-dire que les morphismes $A_{i+1} \rightarrow A_i$ et $B_{i+1} \rightarrow B_i$ sont d'image finie), alors il en est de même pour le noyau $\{\ker f_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ et le conoyau $\{\text{coker } f_i\}_{i \in \mathbf{N}}$.*

Démonstration. C'est évident, car on a des injections $\text{im}(\ker f_{i+1} \rightarrow \ker f_i) \hookrightarrow \text{im}(A_{i+1} \rightarrow A_i)$ et des surjections $\text{im}(B_{i+1} \rightarrow B_i) \twoheadrightarrow \text{im}(\text{coker } f_{i+1} \rightarrow \text{coker } f_i)$. □

1.4 - Lemma. *Soit*

$$\begin{array}{ccccc}
 & & A_k & \longrightarrow & A'_k \\
 & & \downarrow \pi_{kj} & & \downarrow \pi'_{kj} \\
 A'_j & \xrightarrow{f_j} & A_j & \xrightarrow{g_j} & A'_j \\
 \downarrow \pi'_{ji} & & \downarrow \pi_{ji} & & \\
 A'_i & \xrightarrow{f_i} & A_i & &
 \end{array}$$

un diagramme commutatif de groupes abéliens tel que la suite horizontale du milieu est exacte, les deux flèches verticales de côté sont d'image finie, alors la composée des flèches verticale au du milieu est aussi d'image finie.

Démonstration. On vérifie que $\text{im}(\pi_{ki}) \subset \text{im}(f_i \circ \pi'_{ji}) + \pi_{ji}(\overline{\text{im}(\pi'_{kj})})$, où l'on a noté $\overline{\text{im}(\pi'_{kj})}$ pour un choix d'ensemble fini d'antécédents de $\text{im}(\pi'_{kj})$ dans A_j . □

1.5 - Lemma. *Soit*

$$E_r^{i,j}(t) \Rightarrow E_\infty^{i+j}(t), \quad t \in \mathbf{N}$$

un système projectif de suites spectrales de groupes abéliens convergentes. Supposons que pour tout $t \in \mathbf{N}$ et tous i, j , le morphisme $E_r^{i,j}(t+1) \rightarrow E_r^{i,j}(t)$ soit d'image finie.

Soit $n \in \mathbf{N}$. S'il existe un intervalle $[m_1, m_2]$ d'extrémités entières tel que la filtration spectrale sur $E_\infty^n(s)$ pour tout $s \in \mathbf{N}$ est concentrée en degrés dedans, alors pour tout $t \in \mathbf{N}$, le morphisme

$$E_\infty^n(t + (m_2 - m_1 + 1)) \rightarrow E_\infty^n(t)$$

est d'image finie.

Démonstration. Par hypothèse et lemme 1.3, pour tout $i \in \mathbf{Z}$ et tout $t \in \mathbf{N}$, le morphisme $E_\infty^{i,n-i}(t+1) \rightarrow E_\infty^{i,n-i}(t)$ est d'image finie. Or, pour tout $t \in \mathbf{N}$, le groupe $E_\infty^n(t)$ est une extension successive des $E_\infty^{i,n-i}(t)$, $i \in [m_1, m_2]$. Alors $m_2 - m_1$ fois l'application du lemme 1.4 permet de conclure.

Expliquons l'entier $m_2 - m_1$ ici. En effet, dénotant par $\text{Fil}^i(t)$ la filtration spectrale sur l'aboutissement $E_\infty^n(t)$, montrons par récurrence sur l'entier $i \in [m_1 + 1, m_2 + 1]$ que

$$(\star_i) \quad \text{Pour tout } t \in \mathbf{N}, \text{ l'application } E_\infty^n(t + i - m_1) \rightarrow E_\infty^n(t)/\text{Fil}^i(t) \text{ est d'image finie.}$$

Notons que l'on aura $\text{Fil}^{m_2+1}(t) = 0$, ce qui permettra de conclure le lemme. D'abord, si $i = m_1 + 1$, l'image en question est égale à celle de $E_\infty^{m_1, n-m_1}(t+1) \rightarrow E_\infty^{m_1, n-m_1}(t)$, donc finie. Supposons maintenant que (\star_i) soit vraie pour certain $i \in [m_1 + 1, m_2]$. Considérons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc}
& & E_\infty^n(t+i+1-m_1) & \xrightarrow{\text{id}} & E_\infty^n(t+i+1-m_1) \\
& & \downarrow & & \downarrow \\
E_\infty^{i, n-i}(t+1) & \longrightarrow & E_\infty^n(t+1)/\text{Fil}^{i+1}(t+1) & \longrightarrow & E_\infty^n(t+1)/\text{Fil}^i(t+1) \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
E_\infty^{i, n-i}(t) & \longrightarrow & E_\infty^n(t)/\text{Fil}^{i+1}(t) & &
\end{array}$$

dont la suite horizontale du milieu est exacte. La flèche verticale en bas à gauche est d'image finie, et celle en haut à droite l'est aussi par (\star_i) . On en déduit (\star_{i+1}) par une fois l'application du lemme 1.4. \square

1.6 - Corollary. *Soit*

$$E_r^{i,j}(t) \Rightarrow E_\infty^{i+j}(t), \quad t \in \mathbf{N}$$

un système projectif de suites spectrales de groupes abéliens convergentes concentrées au premier quadrant. Supposons que pour tout $t \in \mathbf{N}$ et tous i, j , le morphisme $E_r^{i,j}(t+1) \rightarrow E_r^{i,j}(s)$ soit d'image finie.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Alors pour tout $t \in \mathbf{N}$, le morphisme

$$E_\infty^n(t+n+1) \rightarrow E_\infty^n(t)$$

est d'image finie.

1.7 - Remark. Considérons-en une preuve alternative mais plus générale comme suit. On pourra considérer pour tout $t \in \mathbf{N}$ la filtration décroissante $\text{Fil}_{\text{twist}}^\bullet$ sur $E_\infty^n(t)$ définie par

$$\text{Fil}_{\text{twist}}^i E_\infty^n(t) := \begin{cases} E_\infty^n(t) & \text{si } i \leq m_1 \\ \sum_{j \geq i} E_\infty^n(t) \cap \text{Fil}^j(t-j+m_1) & \text{si } i \in [m_1 + 1, m_2] \end{cases}.$$

où $E_\infty^n(t) \cap \text{Fil}^j(t-j)$ dénote l'image réciproque de $\text{Fil}^j(t-j)$ par $E_\infty^n(t) \rightarrow E_\infty^n(t-j)$. La filtration est stable à partir de $i \geq m_2 + 1$, et on a

$$\text{Fil}_{\text{twist}}^i E_\infty^n(t) = \ker(E_\infty^n(t) \rightarrow E_\infty^n(t - (m_2 - m_1 + 1))), \quad \forall i \geq m_2 + 1.$$

Étudions les gradués. On a $\text{gr}_{\text{twist}}^i \neq 0$ seulement si $i \in [m_1, m_2]$. Pour tels i , le gradué $\text{gr}_{\text{twist}}^i$ reçoit une surjection comme suit

$$\begin{array}{ccc}
\text{im}(E_\infty^{i, n-i}(t) \rightarrow E_\infty^{i, n-i}(t-i+m_1)) & & \\
\cong \uparrow & & \\
\frac{E_\infty^n(t) \cap \text{Fil}^i(t-i+m_1)}{E_\infty^n(t) \cap \text{Fil}^{i+1}(t-i+m_1)} & \twoheadrightarrow & \frac{E_\infty^n(t) \cap \text{Fil}^i(t-i+m_1)}{(E_\infty^n(t) \cap \text{Fil}^i(t-i+m_1)) \cap (\sum_{j \geq i+1} E_\infty^n(t) \cap \text{Fil}^j(t-j+m_1))} \\
& & \downarrow \cong \\
& & \frac{\text{Fil}_{\text{twist}}^i E_\infty^n(t)}{\text{Fil}_{\text{twist}}^{i+1} E_\infty^n(t)},
\end{array}$$

d'où la finitude de $\text{gr}_{\text{twist}}^i E_\infty^n(t)$. On en tire la finitude de

$$\begin{aligned}
\text{Fil}_{\text{twist}}^0 E_\infty^n(t) / \text{Fil}_{\text{twist}}^{+\infty} E_\infty^n(t) &= E_\infty^n(t) / \ker(E_\infty^n(t) \rightarrow E_\infty^n(t - (m_2 - m_1 + 1))) \\
&\xrightarrow{\cong} \text{im}(E_\infty^n(t) \rightarrow E_\infty^n(t - (m_2 - m_1 + 1))).
\end{aligned}$$

1.8 - Corollary. Soient \mathcal{A} une catégorie abélienne et \mathcal{A}_0 une sous-catégorie épaisse. Soit

$$E_r^{i,j}(t) \Rightarrow E_\infty^{i,j}(t), \quad t \in \mathbf{N}$$

un système projectif de suites spectrales dans \mathcal{A} convergentes. Supposons que pour tout $t \in \mathbf{N}$ et tous i, j , le morphisme $E_r^{i,j}(t+1) \rightarrow E_r^{i,j}(t)$ soit d'image dans \mathcal{A}_0 .

Soit $n \in \mathbf{N}$. S'il existe un intervalle $[m_1, m_2]$ d'extrémités entières tel que la filtration spectrale sur $E_\infty^n(s)$ pour tout $s \in \mathbf{N}$ est concentrée en degrés dedans, alors pour tout $t \in \mathbf{N}$, le morphisme

$$E_\infty^n(t + (m_2 - m_1 + 1)) \rightarrow E_\infty^n(t)$$

est d'image dans \mathcal{A}_0 .

Démonstration. Il suffit d'établir que les morphismes $E_\infty^{i,j}(t+1) \rightarrow E_\infty^{i,j}(t)$ soient d'image dans \mathcal{A}_0 , car on pourra alors appliquer l'analyse dans la remarque précédente pour conclure, en tenant compte que \mathcal{A}_0 est stable par extensions et quotients. Pour cela, il suffit de montrer que les morphismes $E_{r+1}^{i,j}(t+1) \rightarrow E_{r+1}^{i,j}(t)$ soient d'image dans \mathcal{A}_0 et raisonner par récurrence. Comme dans la preuve de (1.3), on trouve que $\ker d_r^{i,j}(t+1) \rightarrow \ker d_r^{i,j}(t)$ est d'image un sous-objet de $\text{im}(E_\infty^{i,j}(t+1) \rightarrow E_\infty^{i,j}(t))$, donc dans \mathcal{A}_0 , et que $\text{im} d_r^{i-r,j+r-1}(t+1) \rightarrow \text{im} d_r^{i-r,j+r-1}(t)$ est d'image un quotient de $\text{im}(E_\infty^{i-r,j+r-1}(t+1) \rightarrow E_\infty^{i-r,j+r-1}(t))$, donc dans \mathcal{A}_0 . Finalement, on conclut en prenant leurs quotients $E_{r+1}^{i,j}(\cdot) = \ker d_r^{i,j}(\cdot) / \text{im} d_r^{i-r,j+r-1}(\cdot)$. \square

1.9 - Proposition ([26, Remark 1.2.2.4, Proposition 1.2.4.5]). Soit \mathcal{C} une ∞ -catégorie stable munie d'une t -structure de cœur \mathcal{A} (le nerf d'une catégorie abélienne). Soit A^\bullet un objet cosimplicial de $\mathcal{C}^{\geq 0}$. On a une suite spectrale convergente

$$E_1^{i,j} = E_1^{i,j}(A^\bullet) \Rightarrow \pi_{i+j}(\lim_{\Delta} A^\bullet)$$

avec la première page $(E_1^{i,j}, d_1)$ identifiée au complexe normalisé associé par la correspondance de Dold-Kan à l'objet simplicial $\pi_j(A^\bullet)$ de \mathcal{A} .

Démonstration. C'est loc. cit. appliquée à la catégorie opposée \mathcal{C}^{op} . \square

1.10 - Lemma. Soit $A_1^\bullet \rightarrow \cdots \rightarrow A_{r+1}^\bullet$ une chaîne d'objets cosimpliciaux de $\mathcal{D}^{\geq 0}(\mathbf{Z})$. Supposons que pour tout $t \in [1, r]$ et tous $i, j \in \mathbf{N}$, le morphisme $\pi_j(A_{t+1}^{[i]}) \rightarrow \pi_j(A_t^{[i]})$ est d'image finie. Alors pour tous $n \in \mathbf{N}$ et $t \in [1, r+1 - (n+1)]$, le morphisme

$$\pi_n(\lim_{\Delta} A_{t+n+1}^\bullet) \rightarrow \pi_n(\lim_{\Delta} A_t^\bullet)$$

est d'image finie.

Démonstration. Pour tout $t \in [1, r+1]$, la suite spectrale (1.9) est concentrée au premier quadrant. Vu la compatibilité entre les suites spectrales pour les différents $t \in [1, r+1]$ et par lemme 1.6, il reste à montrer que pour tout $t \in [1, r]$ et tous $i, j \in \mathbf{N}$, le morphisme $E_1^{i,j}(A_{t+1}^\bullet) \rightarrow E_1^{i,j}(A_t^\bullet)$ est d'image finie.

Pour ceci, rappelons que le complexe $(E_1^{i,j}, d_1)$ identifié au complexe normalisé associé à l'objet simplicial $\pi(A^\bullet)$ de $\mathcal{D}^{\geq 0}(\mathbf{F}_p)$ est plus précisément décrit par

$$E_1^{i,j} = \text{coker} \left(\sum_{k=0}^{i-1} \delta_k^j : \bigoplus_{k=0}^{i-1} \pi_j(A^{i-1}) \rightarrow \pi_j(A^i) \right).$$

Pour $t \in [1, r]$ et $i, j \in \mathbf{N}$, le morphisme $\pi_j(A_{t+1}^i) \rightarrow \pi_j(A_t^i)$ est d'image finie, donc le morphisme $E_1^{i,j}(A_{t+1}^\bullet) \rightarrow E_1^{i,j}(A_t^\bullet)$ l'est aussi par lemme 1.3. \square

Cycles proches formels-rigides

1.11. Un schéma sur \mathcal{O}_K est dit *strictement semi-stable* (*resp. semi-stable* s'il est localement pour la topologie de Zariski (*resp.* pour la topologie étale) un schéma formel semi-stable standard

$$\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K[X_0, \dots, X_n]/(X_0 \cdots X_r - \varpi), \quad 1 \leq r \leq n,$$

où ϖ est une uniformisante de K . On peut également définir semi-stabilité (*resp.* stricte semi-stabilité) pour les schémas formels en considérant le spectre formel Spf au lieu du spectre Spec .

On suit [6, 2.1] pour présenter la filtration de Bloch-Kato-Hyodo sur les faisceaux de cycles proches pour les schémas formels et l'identification des gradués.

1.12. **Algébrisation et cycles proches.** Rappelons que si \mathfrak{X} est un schéma formel localement de type fini sur \mathcal{O}_K , on dispose d'une application continue dite *réduction* ou *de spécialisation* $\lambda_{\mathfrak{X}} : \mathfrak{X}_{\eta} \rightarrow \mathfrak{X}$.

Si $\mathfrak{X} = X_{\mathfrak{p}}^{\wedge}$ est le schéma formel complété \mathfrak{p} -adique d'un schéma algébrique X localement de type fini sur \mathcal{O}_K le long de sa fibre spéciale, alors on dispose d'un morphisme de sites $s : (\mathfrak{X}_{\eta})_{\mathrm{\acute{e}t}} \rightarrow (X_{\eta})_{\mathrm{\acute{e}t}}$ faisant partie du diagramme suivant (qui ne commute pas nécessairement)

$$\begin{array}{ccc} (\mathfrak{X}_{\eta})_{\mathrm{\acute{e}t}} & \xrightarrow{s} & (X_{\eta})_{\mathrm{\acute{e}t}} \\ \downarrow \lambda & & \downarrow j \\ \mathfrak{X}_{\mathrm{\acute{e}t}} \simeq (\mathfrak{X}_s)_{\mathrm{\acute{e}t}} & \xrightarrow{i} & X_{\mathrm{\acute{e}t}} \end{array}$$

Pour tout anneau de coefficients commutatif E , on dispose d'une transformation naturelle $\lambda^* i^* \rightarrow s^* j^*$ (avec $i : X_s \rightarrow X$ et $j : X_{\eta} \rightarrow X$) qui induit une transformation naturelle de foncteurs de $D_{\mathrm{\acute{e}t}}^+(X_{\eta}, E)$ à $D_{\mathrm{\acute{e}t}}^+(\mathfrak{X}_s, E)$

$$i^* R j_* \rightarrow R \lambda_* s^*$$

qui est un isomorphisme lorsque E est de torsion [20, Theorem 3.5.13]; en particulier, on obtient une comparaison entre les *cycles proches formels-rigides* $R \lambda_*(s^* \mathcal{F})$ et les cycles proches usuels $i^* R j_* \mathcal{F}$.

On a $R \Gamma_{\mathrm{\acute{e}t}}(\mathfrak{X}_s, R \lambda_*(s^* \mathcal{F})) = R \Gamma_{\mathrm{\acute{e}t}}(\mathfrak{X}_{\eta}, s^* \mathcal{F})$ pour $\mathcal{F} \in D_{\mathrm{\acute{e}t}}^+(X_{\eta}, E)$.

1.13. **Filtration de Bloch-Kato-Hyodo.** Définissons d'abord les symboles cohomologiques pour étudier les cycles proches $i^* R^q j_* \mu_{\mathfrak{p}^r}^{\otimes q}$.

Soit \mathfrak{X} un schéma formel semi-stable sur \mathcal{O}_K . Munissons \mathfrak{X} de la log-structure dite *canonique* induite par la fibre spéciale [2, Theorem 2.3.1], et notons $M_{\mathfrak{X}}$ le faisceaux en monoïdes associé sur \mathfrak{X} . On a $M_{\mathfrak{X}}^{\mathrm{gp}}(\mathfrak{U}) = \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_{\eta}}(\mathfrak{U}_{\eta})^*$ pour tout $\mathfrak{U} \in \mathfrak{X}_{\mathrm{\acute{e}t}}$. La théorie de Kummer fournit une flèche

$$M_{\mathfrak{X}}^{\mathrm{gp}} \simeq \lambda_* \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_{\eta}}^* \rightarrow R^1 \lambda_* \mu_{\mathfrak{p}^r}$$

puis par le cup-produit le symbole cohomologique

$$(M_{\mathfrak{X}}^{\mathrm{gp}})^{\otimes q} \rightarrow R^q \lambda_* \mu_{\mathfrak{p}^r}^{\otimes q}$$

pour tous $q, r \geq 0$.

En procédant comme précédemment avec un X à la place de \mathfrak{X} , on obtient le symbole cohomologique

$$(i^* M_X^{\mathrm{gp}})^{\otimes q} \rightarrow i^* R^q j_* \mu_{\mathfrak{p}^r}^{\otimes q}$$

pour tous $q, r \geq 0$; voir [40, (3.2.3)].

Introduisons maintenant la filtration de Bloch-Kato-Hyodo. Soit ϖ une uniformisante de K et osons $e' = \frac{ep}{p-1}$ où e est l'indice de ramification absolu de K .

Dans le cas de X , la filtration de ramification $1 + \varpi^m \mathcal{O}_X \subset j_* \mathcal{O}_{X_\eta}^*$ induit une filtration sur M_X^{gp} et puis par application de symboles une filtration décroissante

$$i^* R^q j_* \mu_{p^r}^{\otimes q} \supset U_X^0 \supset V_X^0 \supset U_X^1 \supset V_X^1 \supset \dots$$

sur les cycles proches $i^* R^q j_* \mu_{p^r}^{\otimes q}$ [40, au-dessus de Theorem 3.3.1].

On procède de même sur \mathfrak{X} en utilisant l'inclusion $1 + \varpi^m \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \lambda_* \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_\eta}^*$ donné par $1 + \varpi^m \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{U}) \rightarrow \lambda_* \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_\eta}^*(\mathfrak{U}) = \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_\eta}^*(\mathfrak{U}_\eta)$. Ainsi, on obtient une filtration par symboles

$$R^q \lambda_* \mu_{p^r}^{\otimes q} \supset U_{\mathfrak{X}}^0 \supset V_{\mathfrak{X}}^0 \supset U_{\mathfrak{X}}^1 \supset V_{\mathfrak{X}}^1 \supset \dots$$

Lorsque $\mathfrak{X} = X_p^\wedge$, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc} i^*(1 + \varpi^m \mathcal{O}_X) & \longrightarrow & (i^* M_X^{\text{gp}})^{\otimes q} & \longrightarrow & i^* R^q j_* \mu_{p^r}^{\otimes q} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 + \varpi^m \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} & \longrightarrow & (M_{\mathfrak{X}}^{\text{gp}})^{\otimes q} & \longrightarrow & R^q \lambda_* \mu_{p^r}^{\otimes q} \end{array}$$

où la deuxième flèche verticale de droite est induite par

$$M_X(U) \rightarrow i_* M_{\mathfrak{X}}(U) = M_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{U}),$$

le schéma formel \mathfrak{U} étant le relèvement de U_0 ou également le complété formel de U . Donc la comparaison entre les cycles proches usuels et rigides est compatible avec les filtrations définies ci-dessus.

On ne présente le résultat classique sur les gradués de cette filtration dans le cas $r = 1$ où ils sont tous explicites.

1.14 - Theorem (Bloch-Kato-Hyodo, [40, Theorem 3.3.1]). *Soit X un schéma semi-stable sur \mathcal{O}_K . Les gradués de la filtration de Bloch-Kato-Hyodo sur $i^* R^q j_* \mu_p^{\otimes q}$ sont décrits comme suit (avec $Y = X_s$):*

(i) On a $i^* R^q j_* \mu_p^{\otimes q} = U^0$.

(ii) On a des isomorphismes

$$\text{gr}_0^0 := U^0/V^0 \simeq \Omega_{Y/k, \log}^q, \quad \text{gr}_1^0 := V^0/U^1 \simeq \Omega_{Y/k, \log}^{q-1}$$

induits respectivement par

$$\{a_1, \dots, a_q\} \mapsto \wedge_{i=1}^q \text{dlog } \bar{a}_i, \quad \{a_1, \dots, a_{q-1}, \varpi\} \mapsto \wedge_{i=1}^{q-1} \text{dlog } \bar{a}_i.$$

(iii) Si $0 \leq m < e'$ et $p \nmid m$, on a des isomorphismes

$$\text{gr}_0^m := U^m/V^m \simeq \Omega_{Y/k}^{q-1}/B_{Y/k}^{q-1}, \quad \text{gr}_1^m := V^m/U^{m+1} \simeq \Omega_{Y/k}^{q-2}/Z_{Y/k}^{q-2}$$

induits respectivement par

$$\{1 + \varpi^m x, a_1, \dots, a_{q-1}\} \mapsto \bar{x} \cdot \wedge_{i=1}^{q-1} \text{dlog } \bar{a}_i, \quad \{1 + \varpi^m x, a_1, \dots, a_{q-2}, \varpi\} \mapsto \bar{x} \cdot \wedge_{i=1}^{q-2} \text{dlog } \bar{a}_i.$$

(iv) Si $0 \leq m < e'$ et $p \mid m$, on a des isomorphismes

$$\mathrm{gr}_0^m := U^m / V^m \simeq \Omega_{Y/k}^{q-1} / Z_{Y/k}^{q-1}, \quad \mathrm{gr}_1^m := V^m / U^{m+1} \simeq \Omega_{Y/k}^{q-2} / Z_{Y/k}^{q-2}$$

induits respectivement par

$$\{1 + \varpi^m x, a_1, \dots, a_{q-1}\} \leftarrow \bar{x} \cdot \wedge_{i=1}^{q-1} \mathrm{dlog} \bar{a}_i, \quad \{1 + \varpi^m x, a_1, \dots, a_{q-2}, \varpi\} \leftarrow \bar{x} \cdot \wedge_{i=1}^{q-2} \mathrm{dlog} \bar{a}_i.$$

(v) Si $m \geq e'$, on a $U^m = 0$.

1.15 - Corollary ([6, Théorème 2.4]). Soit \mathfrak{X} un schéma formel semi-stable sur \mathcal{O}_K . On a la même identification (1.14, (i)-(v)) pour les gradués de la filtration de Bloch-Kato-Hyodo de $R^q \lambda_* \mu_p^{\otimes q}$.

Démonstration. La question étant locale pour la topologie étale sur \mathfrak{X} , on peut supposer que \mathfrak{X} est un schéma formel semi-stable standard, de sorte que $\mathfrak{X} = \widehat{X}$ pour X un schéma semi-stable standard. Le corollaire se déduit alors de la comparaison entre les cycles proches usuels et rigides

$$i^* Rj_* \mu_p^{\otimes q} \xrightarrow{\simeq} R\lambda_*(s^* \mu_p^{\otimes q}) \simeq R\lambda_* \mu_p^{\otimes q},$$

compte tenu de sa compatibilité (selon les définitions) avec les filtrations par symboles et les identifications explicites dans l'énoncé du théorème précédent. \square

1.16 - Remark. Les $\Omega_{Y/k}^q / B_{Y/k}^q$ et les $\Omega_{Y/k}^q / Z_{Y/k}^q$ sont naturellement des \mathcal{O}_Y -modules cohérents via le Frobenius $F = (-)^{\flat} : \mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_Y$. Plus précisément, on a

$$f \cdot (x \cdot \wedge_{i=1}^q \mathrm{dlog} a_i) = f^{\flat} x \cdot \wedge_{i=1}^q \mathrm{dlog} a_i$$

pour les sections locales f, x de \mathcal{O}_Y et les sections locales a_i de \mathcal{O}_Y^{\times} pour $i = 1, \dots, q$.

2 Conséquences de la conjecture

Profinitude pour les espaces partiellement propres

2.1 - Definition (Stricte inclusion). Soit $U \subset X$ l'inclusion d'un ouvert admissible dans un espace rigide.

(i) Lorsque $X = \mathrm{Sp}(R)$ et U est un ouvert affinoïde, on dit que l'inclusion est stricte s'il existe $r \in \mathbf{Q} \cap]0, 1[$ et une présentation $R = K\langle T_1, \dots, T_m \rangle / J$ tel que l'inclusion se factorise comme $U \subset X(r) = \mathrm{Sp}(R_r) = X(\frac{T_1}{p^r}, \dots, \frac{T_m}{p^r}) \subset X$ dont la seconde flèche est induite par le morphisme naturel

$$R = K\langle T_1, \dots, T_m \rangle / J \rightarrow K\langle T_1, \dots, T_m, S_1, \dots, S_m \rangle / (J, T_1^{r_2} - p^{r_1} S_1, \dots, T_m^{r_2} - p^{r_1} S_m) = R_r,$$

où $r = \frac{r_1}{r_2}$ avec $r_1, r_2 \in \mathbf{N}$. On écrira $U \subset^{\dagger} X$.

(ii) Lorsque U est un ouvert affinoïde admissible, on dit que l'inclusion est stricte si elle se raffine comme $U \subset^{\dagger} V \subset X$ pour un ouvert affinoïde admissible V de X . On écrira $U \subset^{\dagger} X$.

(iii) Lorsque X est séparé et U est un ouvert admissible quasi-compact, on dit que l'inclusion est stricte s'il existe un recouvrement admissible affinoïde fini $\{U_i\}_{i \in I}$ de U tels que $U_i \subset^{\dagger} X$. On écrira $U \subset^{\dagger} X$.

2.2 - Definition ([15, 2.24]). Soit X un espace rigide sur un corps non-archimédien complet K .

(i) On dit que X est *partiellement propre* s'il est séparé et s'il admet un recouvrement admissible affinoïde dénombrable $\{U_i\}_{i \in I}$ tel que pour tout $i \in I$, il existe un ouvert affinoïde admissible \widetilde{U}_i de X tel que $U_i \subset^{\dagger} \widetilde{U}_i$.

(ii) On dit que X est *de Stein* s'il admet un *recouvrement de Stein*, c'est-à-dire un recouvrement admissible affinoïde $\{U_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ tel que $U_i \subset^{\dagger} U_{i+1}$.

On dit aussi que X est *propre* s'il est partiellement propre et quasi-compact.

Tout espace rigide de Stein sur K est partiellement propre (donc en particulier séparé).

2.3 - Example. Soit $X = \mathrm{Sp}(R)$ un espace rigide affinoïde avec une présentation $R = K\langle T_1, \dots, T_m \rangle / J$, son intérieur associé $X^\circ := \bigcup_{\delta \in \mathbf{Q} \cap]0,1[} X(\delta)$ est un espace rigide de Stein sur K de recouvrement de Stein $\{X(1 - \frac{1}{p^n})\}_{n \in \mathbf{N}}$.

2.4 - Lemma. Soit X un espace rigide sur un corps non-archimédien complet K . Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) X est partiellement propre ;
- (ii) X est séparé, admet un recouvrement admissible dénombrable par des quasi-compacts, et est localement Stein, c'est-à-dire que tout $x \in X$ possède un voisinage ouvert admissible U_x qui est de Stein.
- (iii) X admet un recouvrement admissible $\{U_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ tel que les U_n sont quasi-compacts séparés et que $U_n \subset^\dagger U_{n+1}$.

Démonstration. L'implication (i) \Rightarrow (ii) est claire vu l'exemple 2.3. Et l'implication (iii) \Rightarrow (i) découle aussitôt de la définition (2.1, iii). Montrons la direction (ii) \Rightarrow (iii). Pour tout $x \in X$, choisissons un recouvrement de Stein $\{U_{x,n}\}_{n \in \mathbf{N}}$ de U_x ; on a $U_{x,n} \subset^\dagger U_{x,n+1}$. Par hypothèse, il existe un sous-ensemble dénombrable $E = \{x_m\}_{m \in \mathbf{N}} \subset X$ tel que $\{U_{x_m,n}\}_{m \in \mathbf{N}, n \in \mathbf{N}}$ forme un recouvrement admissible de X . Les ouverts affinoïdes admissibles

$$U_n = \bigcup_{1 \leq m \leq n} U_{x_m,n}, \quad n \in \mathbf{N}$$

convieront pour (iii). □

2.5 - Lemma. Soit $U \subset^\dagger X$ une inclusion stricte d'un ouvert admissible quasi-compact dans un espace rigide séparé de dimension d sur K . Supposons que la conjecture (0.3) soit vraie en dimension d . Alors pour tous $n, m \in \mathbf{N}$, l'application induite $H_{\text{ét}}^n(X, \mathbf{Z}/p^m) \rightarrow H_{\text{ét}}^n(U, \mathbf{Z}/p^m)$ est d'image finie.

Démonstration. Montrons par récurrence sur l'entier $r \geq 1$ que

(\star_r) L'énoncé est vrai pour toute inclusion stricte $U \subset^\dagger X$ telle qu'il existe $\{U_\alpha\}_{1 \leq \alpha \leq r}$ un recouvrement affinoïde fini de U et $\{V_\alpha\}_{1 \leq \alpha \leq r}$ une famille d'ouverts affinoïdes admissibles de X tels que $U_\alpha \subset^\dagger V_\alpha$ pour tout α .

La conjecture (0.3) dit que (\star_1) est vrai. Supposons maintenant que (\star_r) soit vrai, et supposons l'existence de $\{U_\alpha\}_{1 \leq \alpha \leq r+1}$ un recouvrement affinoïde fini de U et de $\{V_\alpha\}_{1 \leq \alpha \leq r+1}$ une famille d'ouverts affinoïdes admissibles de X tels que $U_\alpha \subset^\dagger V_\alpha$ pour tout α . Il existe $\delta \in \mathbf{Q} \cap]0,1[$ telle que $U_\alpha \subset^\dagger V_\alpha(\delta) \subset^\dagger V_\alpha$ pour tout α .

Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} H_{\text{ét}}^n(\bigcup_{1 \leq \alpha \leq r+1} V_\alpha, \mathbf{Z}/p^m) & \longrightarrow & H_{\text{ét}}^n(\bigcup_{1 \leq \alpha \leq r} V_\alpha, \mathbf{Z}/p^m) \oplus H_{\text{ét}}^n(V_{r+1}, \mathbf{Z}/p^m) & & \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ H_{\text{ét}}^{n-1}(\bigcup_{1 \leq \alpha \leq r} V_\alpha(\delta) \cap V_{r+1}(\delta), \mathbf{Z}/p^m) & \longrightarrow & H_{\text{ét}}^n(\bigcup_{1 \leq \alpha \leq r+1} V_\alpha(\delta), \mathbf{Z}/p^m) & \longrightarrow & H_{\text{ét}}^n(\bigcup_{1 \leq \alpha \leq r} V_\alpha(\delta), \mathbf{Z}/p^m) \oplus H_{\text{ét}}^n(V_{r+1}(\delta), \mathbf{Z}/p^m) \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ H_{\text{ét}}^{n-1}(\bigcup_{1 \leq \alpha \leq r} U_\alpha \cap U_{r+1}, \mathbf{Z}/p^m) & \longrightarrow & H_{\text{ét}}^n(\bigcup_{1 \leq \alpha \leq r+1} U_\alpha, \mathbf{Z}/p^m) & & \end{array}$$

resp.

$$\begin{array}{ccccc} H_{\text{ét},c}^n(\bigcup_{1 \leq \alpha \leq r+1} V_\alpha, \mathbf{Z}/p^m) & \longrightarrow & H_{\text{ét},c}^{n+1}(\bigcup_{1 \leq \alpha \leq r} V_\alpha \cap V_{r+1}, \mathbf{Z}/p^m) & & \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ H_{\text{ét},c}^n(\bigcup_{1 \leq \alpha \leq r} V_\alpha(\delta), \mathbf{Z}/p^m) \oplus H_{\text{ét},c}^n(V_{r+1}(\delta), \mathbf{Z}/p^m) & \longrightarrow & H_{\text{ét},c}^n(\bigcup_{1 \leq \alpha \leq r+1} V_\alpha(\delta), \mathbf{Z}/p^m) & \longrightarrow & H_{\text{ét},c}^{n+1}(\bigcup_{1 \leq \alpha \leq r} V_\alpha(\delta) \cap V_{r+1}(\delta), \mathbf{Z}/p^m) \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ H_{\text{ét},c}^n(\bigcup_{1 \leq \alpha \leq r} U_\alpha, \mathbf{Z}/p^m) \oplus H_{\text{ét},c}^n(U_{r+1}, \mathbf{Z}/p^m) & \longrightarrow & H_{\text{ét},c}^n(\bigcup_{1 \leq \alpha \leq r+1} U_\alpha, \mathbf{Z}/p^m) & & \end{array}$$

donné par la suite exacte longue de Mayer-Vietoris pour la cohomologie étale *resp.* pour la cohomologie étale à support compact¹. Comme X est séparé, les $U_\alpha \cap U_{r+1}$, $V_\alpha(\delta) \cap V_{r+1}(\delta)$ et $V_\alpha \cap V_{r+1}$ pour $1 \leq \alpha \leq r$ sont affinoïdes rigides, et on a $U_\alpha \cap U_{r+1} \subset^\dagger V_\alpha(\delta) \cap V_{r+1}(\delta) \subset^\dagger V_\alpha \cap V_{r+1}$. Par hypothèse de récurrence (\star_r) , les flèches verticales des deux côtés sont d'image finie; donc le sont aussi les composées des flèches verticales du milieu par (1.4), autrement dit, (\star_{r+1}) est vrai. \square

2.6. Structure condensée sur la cohomologie étale. Pour tout espace rigide X sur K , nous disposons du morphisme de sites $\nu_X : X_{\text{proét}} := X_{\text{qproét}}^\circ \rightarrow X_{\text{ét}}$ vérifiant que $\nu_X^* : X_{\text{ét}}^\sim \rightarrow X_{\text{proét}}^\sim$ est fidèlement plat [34, Proposition 14.8], ce qui nous permet de voir $R\Gamma_{\text{ét}}(X, \mathcal{F}) \simeq R\Gamma_{\text{qproét}}(X^\circ, \nu_X^* \mathcal{F})$ pour tout faisceau étale \mathcal{F} sur X comme un groupe condensée; plus précisément, on définit la *cohomologie étale condensée* comme

$$\underline{R\Gamma}_{\text{ét}}(X, \mathcal{F}) = Rf_{\text{proét},*} \nu_X^* \mathcal{F} \in D(\text{CondAb})$$

où $f_{\text{proét}} : X_{\text{proét}} \rightarrow *_{\text{proét}}$ est le morphisme de sites et on a identifié la catégorie $\mathbf{Ab}(*_{\text{proét}})$ des faisceaux pro-étales de groupes abéliens sur un point à la catégorie des groupes abéliens condensée CondAb ; autrement dit, pour tout ensemble profini S , on a

$$\underline{R\Gamma}_{\text{ét}}(X, \mathcal{F})(S) \simeq R\Gamma_{\text{qproét}}(X^\circ \times S, \nu_X^* \mathcal{F}).$$

2.6.1. Si X est quasi-compact, alors [34, Proposition 11.23, Proposition 14.9]

$$R\Gamma_{\text{qproét}}(X^\circ \times S, \nu_X^* \mathcal{F}) \simeq \varinjlim_i R\Gamma_{\text{qproét}}(X^\circ \times S_i, \nu_X^* \mathcal{F}) \simeq \text{Hom}_{\text{Set}}(S_i, R\Gamma_{\text{qproét}}(X^\circ, \nu_X^* \mathcal{F}))$$

où $S \simeq \varprojlim_i S_i$ est une représentation profinie, donc on a

$$\underline{R\Gamma}_{\text{ét}}(X, \mathcal{F}) \simeq \underline{R\Gamma}_{\text{ét}}(X, \mathcal{F})$$

qui est *classique* et discret, i.e. provient d'un groupe abélien discret.

2.6.2. Si X est une réunion croissante d'ouverts quasi-compacts $\{X_i\}_{i \in \mathbf{N}}$, alors

$$\underline{R\Gamma}_{\text{ét}}(X, \mathcal{F})(S) \simeq R\Gamma_{\text{qproét}}(X^\circ \times S, \nu_X^* \mathcal{F}) \simeq R \lim_i R\Gamma_{\text{qproét}}(X_i^\circ \times S, \nu_X^* \mathcal{F}) \simeq R \lim_n \underline{R\Gamma}_{\text{ét}}(X_n, \nu_X^* \mathcal{F})(S).$$

Ainsi, le groupe condensée dérivé $\underline{R\Gamma}_{\text{ét}}(X, \mathcal{F}) \simeq R \lim_n \underline{R\Gamma}_{\text{ét}}(X_n, \nu_X^* \mathcal{F})$ est une limite dérivée d'objets discrets, donnant pour tout $n \in \mathbf{N}$ la suite exacte de groupes condensés

$$0 \rightarrow R^1 \lim_i \underline{H}_{\text{ét}}^{n-1}(X_i, \mathcal{F}) \rightarrow \underline{H}_{\text{ét}}^n(X, \mathcal{F}) \rightarrow \lim_i \underline{H}_{\text{ét}}^n(X_i, \mathcal{F}) \rightarrow 0$$

où le groupe $\lim_i \underline{H}_{\text{ét}}^n(X_i, \mathcal{F})$ muni de la topologie pro-discrète. Si les applications $\underline{H}_{\text{ét}}^n(X_{i+1}, \mathcal{F}) \rightarrow \underline{H}_{\text{ét}}^n(X_i, \mathcal{F})$ sont d'image finie, on aura $R^1 \lim_i \underline{H}_{\text{ét}}^n(X_i, \mathcal{F}) = 0$ pour tout n , ce qui assure que

$$\underline{H}_{\text{ét}}^n(X, \mathcal{F}) \simeq \underline{\lim}_i \underline{H}_{\text{ét}}^n(X_i, \mathcal{F})$$

qui provient d'un groupe profini.

2.7 - Corollary. *Soit X un espace rigide partiellement propre de dimension d sur K . Supposons que la conjecture (0.3) soit vraie en dimension d . Pour tous $n, m \in \mathbf{N}$, le groupe $\underline{H}_{\text{ét}}^n(X, \mathbf{Z}/p^m)$ est profini et on a $\underline{H}_{\text{ét}}^n(X, \mathbf{Z}/p^m) \rightarrow \lim_i \underline{H}_{\text{ét}}^n(U_i, \mathbf{Z}/p^m)$.*

1. Pour un faisceau \mathcal{F} de groupes abéliens sur $X_{\text{ét}}$ et des ouverts U et V de X , on a la suite exacte courte des faisceaux

$$0 \rightarrow j_{U \cap V!} \mathcal{F}|_{U \cap V} \rightarrow j_{U!} \mathcal{F}_U \oplus j_{V!} \mathcal{F}_V \xrightarrow{(s,t) \mapsto s-t} j_{U \cup V!} \mathcal{F}_{U \cup V} \rightarrow 0.$$

On en prend ensuite la suite exacte longue de groupes de cohomologie étale à support compact.

Démonstration. Écrivons X comme la réunion croissante des ouverts admissibles quasi-compacts U_i tels que $U_i \subset^\dagger U_{i+1}$ comme dans (2.4, iii). Pour tout faisceau de groupes abéliens \mathcal{F} sur $X_{\text{ét}}$, on a $R\Gamma_{\text{ét}}(X, \mathcal{F}) = R\lim_i R\Gamma_{\text{ét}}(U_i, \mathcal{F}|_{U_i})$, d'où la suite exacte

$$0 \rightarrow R^1 \lim_i H_{\text{ét}}^{n-1}(U_i, \mathcal{F}|_{U_i}) \rightarrow H_{\text{ét}}^n(X, \mathcal{F}) \rightarrow \lim_n H_{\text{ét}}^i(U_i, \mathcal{F}|_{U_i}) \rightarrow 0$$

par annulation de $R^j \lim_{i \in \mathbb{N}}$ pour $j \geq 2$. En particulier, pour $\mathcal{F} = \mathbf{Z}/\mathfrak{p}^m$, le système $(H_{\text{ét}}^n(U_i, \mathbf{Z}/\mathfrak{p}^m))_i$ étant profini d'après (4.5) que l'on vient de démontrer, son $R^1 \lim$ s'annule, d'où $H_{\text{ét}}^n(X, \mathbf{Z}/\mathfrak{p}^m) \xrightarrow{\cong} \lim_i H_{\text{ét}}^n(U_i, \mathbf{Z}/\mathfrak{p}^m)$ qui est profini. \square

Pour les coefficients Zariski-constructibles

2.8 - Définition (Faisceaux constructibles de Zariski). Soit X un espace rigide sur un corps non-archimédien complet K . Fixons un anneau de coefficients Λ *noethérien*. Un *faisceau de Λ -modules constructible de Zariski* est un faisceau \mathcal{F} sur $X_{\text{ét}}$ tel qu'il existe une décomposition de X en réunion disjointe localement finie de sous-espaces $Z_i, i \in I$ localement fermé pour la topologie de Zariski sur X de telle sorte que les restrictions $\mathcal{F}|_{Z_i}, i \in I$ sont des faisceaux localement constants de type fini². On dénote par $\mathbf{Sh}_{\text{zc}}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ la sous-catégorie pleine de la catégorie $\mathbf{Sh}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ formée de tous les faisceaux de Λ -modules constructibles de Zariski.

2.9. Désingularisation pour les espaces rigides en caractéristique 0. Soit X un espace rigide affinoïde sur un corps non-archimédien complet K . En particulier, X est excellent : toute K -algèbre affinoïde est un anneau excellent [11, Théorème 2.13] (cf. [29, Theorem 102]).

Supposon que K soit de caractéristique 0. Soit $Z \subset X$ un sous-espace analytique fermé. D'après les théorèmes de désingularisation de Temkin pour les espaces rigides [39, Theorem 1.1.13], il existe une séquence finie d'éclatements chacun le long d'un sous-espace analytique fermé nulle part dense

$$g : X' = X_m \rightarrow \cdots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 = X$$

avec X' lisse et telle que g soit un isomorphisme en dehors de $X_{\text{sing}} \cup Z$. En particulier, g est un morphisme propre d'espaces rigides.

Si de plus $X = \text{Sp}(A)$ est affinoïde, Z est l'analytification d'un sous-schéma fermé $Z^{\text{alg}} \subset X^{\text{alg}} = \text{Spec}(A)$, et la séquence d'éclatements provient de l'analytification relative [23, §1] (puis réinterprétée dans [8, Example 2.11]) d'une séquence analogue sur X^{alg} [39, Theorem 1.1.11]

$$g^{\text{alg}} : X'^{\text{alg}} = X_m^{\text{alg}} \rightarrow \cdots \rightarrow X_1^{\text{alg}} \rightarrow X_0^{\text{alg}} = X^{\text{alg}}$$

avec X'^{alg} régulier³ et telle que g^{alg} soit un isomorphisme en dehors de $X_{\text{sing}}^{\text{alg}} \cup Z^{\text{alg}}$. D'après la GAGA rigide relative [8, Appendix, (A.1.1)],

$$g_* \mathcal{O}_{X'} \simeq (g_*^{\text{alg}} \mathcal{O}_{X'^{\text{alg}}})^{\text{an}}$$

qui est un \mathcal{O}_X -module cohérent, et isomorphe à $\mathcal{O}_{X^{\text{alg}}}^{\text{an}} = \mathcal{O}_X$ si X^{alg} est normal.

2.10 - Lemma ([36, Lemma 0A3R]). *Un faisceau \mathcal{F} de \mathbf{F}_l -modules localement constant fini sur $X_{\text{ét}}$ est trivialisable par un revêtement fini étale $f : Y \rightarrow X$ de degré premier à l sur chaque composante connexe de X .*

Démonstration. Soit $X_0 \subset X$ une composante connexe. Comme X est localement connexe, X_0 est un ouvert dans X . Soit \bar{x}_0 un point géométrique de X_0 .

2. Le cas non noethérien demande par exemple la n -constructibilité : l'existence locale d'une résolution de longueur finie par des A -modules libres de type fini, voir [1, Exposé IX, Définition 2.3, note de bas 34].

3. Soit A une algèbre de type fini sur un affinoïde sur K . Si A est régulier et la caractéristique K est 0, alors A est géométriquement régulier [17, Proposition 6.7.4], donc l'espace rigide $\text{Sp}(A)$ est lisse [13, Theorem 5.3.4, (1)].

Par la théorie de Galois pour X_0 , le faisceau localement constant \mathcal{F} correspond à une représentation du groupe profini $\pi_1^{\text{alg}}(X_0, \bar{x}_0)$ sur un \mathbf{F}_l -espace vectoriel V de dimension finie. Soit $G := \text{im}(\pi_1^{\text{alg}}(X_0, \bar{x}_0) \rightarrow \mathbf{GL}_{\mathbf{F}_l}(V))$, qui correspond à un revêtement fini étale Y de X_0 , galoisien de groupe de Galois G . Soit H un l -sous-groupe de Sylow de G . La représentation de H sur V admet une filtration dont les gradués sont des représentations de dimension 1 [35, Chapitre 8, Proposition 26]. Cette filtration correspond par le théorie de Galois à une filtration de \mathcal{F} dont les gradués sont des faisceaux localement constants de rang 1 sur \mathbf{F}_l trivialisés sur le revêtement fini étale Y/H de X_0 de degré $|G/H|$ premier à l par le choix de G . \square

2.11 - Proposition (Cas affinoïde et variante de [19, Theorem 1.6 ou Theorem 2.10]). *Soit $X = \text{Sp}(A)$ un affinoïde rigide sur un corps non-archimédien complet K de caractéristique 0. Alors pour tout fermé de Zariski $Z \subset X$ nulle part dense et incluant X_{sing} , le foncteur restriction*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Morphismes } Y \rightarrow X \text{ finis surjectifs,} \\ \text{étales sur } X \setminus Z \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Morphismes } Y \rightarrow X \text{ finis étales surjectifs} \\ Y \mapsto Y \times_X (X \setminus Z) \end{array} \right.$$

est essentiellement surjectif.

2.12 - Remark. Ce résultat a été essentiellement prouvé dans la preuve de [19, Theorem 2.10], mais n'y est énoncé que pour les espaces rigides *normaux* pour pouvoir appliquer la pleine fidélité afin de se localiser au cas affinoïde. Néanmoins, la normalité apparaissait aussi tout à la fin *loc. cit.* pour la pleine fidélité du foncteur $(-) \times_{X \setminus Z} (X \setminus Z)^{\text{sm}}$. Nous allons montrer que ceci pourrait être contourné si $Z \supset X_{\text{sing}}$.

Démonstration. Rappelons que le résultat est valable pour X lisse et $Z \subset X$ un diviseur à croisements normaux strict d'après [28] ou [19, Theorem 2.11]. On s'y réduit.

Le fermé de Zariski Z est de la forme $\text{Sp}(B)$ où $B = A/I$ avec $I \subset A$ un idéal [20, (1.4.1) et (1.4.4)]. Notons $X^{\text{alg}} = \text{Spec}(A)$ et $Z^{\text{alg}} = \text{Spec}(B)$. D'après la désingularisation à la Temkin (2.9), il existe une séquence finie d'éclatements

$$g^{\text{alg}} : X'^{\text{alg}} = X_m^{\text{alg}} \rightarrow \dots \rightarrow X_1^{\text{alg}} \rightarrow X_0^{\text{alg}} = X^{\text{alg}} = \text{Spec}(A)$$

avec X'^{alg} régulier, telle que $g^{\text{alg}^{-1}}(Z^{\text{alg}})$ soit un diviseur à croisements normaux strict dans X'^{alg} , et que g^{alg} soit un isomorphisme en dehors de $X_{\text{sing}}^{\text{alg}} \cup Z^{\text{alg}} = Z^{\text{alg}}$. Dénotons son analytification en relevant la décoration « alg ».

Posons $U = X \setminus Z$, $U' = g^{-1}(U)$ et $Z' = g^{-1}(Z)$. Alors par l'analytification, $Z' \subset X'$ est un diviseur à croisements normaux strict.

Soit $\phi : V \rightarrow U$ un morphisme fini étale. Notons $V' = V \times_X X'$. D'après ce qui précède, il existe un morphisme $\pi' : Y' \rightarrow X'$ fini surjectif, étale sur $X' \setminus Z'$, tel que $Y' \times_{X'} U' = V'$. Nous disposons maintenant du diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccc} V' & \longrightarrow & Y' & & & & \\ \downarrow g_V & \searrow \phi' & \downarrow \pi' & & & & \\ & & U' & \xrightarrow{j'} & X' & \xleftarrow{i'} & Z' \\ & & \downarrow g_U & & \downarrow g & & \downarrow g_Z \\ V & \xrightarrow{\phi} & U & \xrightarrow{j} & X & \xleftarrow{i} & Z \end{array}$$

dont tous les parallélogrammes sont cartésiens.

Définissons

$$\mathcal{A} := g_* \pi'_* \mathcal{O}_{Y'}.$$

et

$$Y := \text{Spec}_X(\mathcal{A}) \xrightarrow{\pi} X$$

le spectre affine au-dessus de X . Comme g est propre, \mathcal{A} est un \mathcal{O}_X -module cohérent, donc π est un morphisme fini; de plus, on a

$$j^* \mathcal{A} = j^* g_* \pi'_* \mathcal{O}_{Y'} \simeq g_{U*} j'^* \pi'_* \mathcal{O}_{Y'} \simeq g_{U*} \phi'_* \mathcal{O}_{V'} \simeq \phi_* g_{V*} \mathcal{O}_{V'} \simeq \phi_* \mathcal{O}_V,$$

où l'on a utilisé le changement de base propre et la condition que g_U soit un isomorphisme. Donc,

$$Y \times_X U = \text{Spec}_U(j^* \mathcal{A}) \simeq \text{Spec}_U(\phi_* \mathcal{O}_V) \simeq V.$$

Pour conclure, le morphisme fini π est fermé, d'image contenant l'ouvert dense U , donc π est surjectif. \square

2.13 - Proposition. *Soit $U \subset^\dagger X$ une inclusion stricte d'un ouvert admissible quasi-compact dans un espace rigide séparé de dimension d sur K . Supposons que la conjecture (0.3) soit vraie en dimension $\leq d$. Alors pour tous $n, m \in \mathbf{N}$, les applications induites $H_{\text{ét}}^n(X, \mathcal{F}) \rightarrow H_{\text{ét}}^n(U, \mathcal{F}|_U)$ et $H_{\text{ét},c}^n(U, \mathcal{F}|_U) \rightarrow H_{\text{ét},c}^n(X, \mathcal{F})$ sont d'image finie pour tout faisceau de \mathbf{Z}/n -modules constructible de Zariski \mathcal{F} sur $X_{\text{ét}}$.*

Démonstration. Par « dévissage », on entendra implicitement une application du lemme 1.4.

Par la même technique de suite spectrale de Čech, on se ramène au cas où $X = \text{Sp}(A)$ est un affinoïde et que $U \subset^\dagger X$ est une inclusion stricte d'affinoïdes rigides.

Ensuite, par des dévissages du type

$$0 \rightarrow \mathcal{F}[l] \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow l\mathcal{F} \rightarrow 0,$$

on se ramène au cas où \mathcal{F} est un faisceau de \mathbf{F}_l -modules pour certain nombre premier l . Par constructibilité et dévissage du type

$$0 \rightarrow j_! j^* \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow i_* i^* \mathcal{F} \rightarrow 0,$$

où $j : U \rightarrow X$ est l'inclusion d'un ouvert de Zariski dense et $i : X \setminus U \rightarrow X$ l'immersion fermée du complémentaire qui inclut X_{sing} , et par récurrence sur la dimension de X , on se ramène au cas où $\mathcal{F} = j_! \mathcal{G}$ où $j : U \rightarrow X$ est l'inclusion d'un ouvert de Zariski dense lisse et \mathcal{G} est un faisceau de \mathbf{F}_l -modules localement constant. En effet, prenons tels U et \mathcal{G} . Pour tous $\delta < \delta'$ deux nombres dans $\mathbf{Q} \cap]0, 1[$ considérons les suites exactes compatibles

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & H_{\text{ét}}^n(X, j_! j^* \mathcal{F}) & \longrightarrow & H_{\text{ét}}^n(X, \mathcal{F}) & \longrightarrow & H_{\text{ét}}^n(Z, i^* \mathcal{F}) & \longrightarrow \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \longrightarrow & H_{\text{ét}}^n(X(\delta'), j_! j^* \mathcal{F}) & \longrightarrow & H_{\text{ét}}^n(X(\delta'), \mathcal{F}) & \longrightarrow & H_{\text{ét}}^n(Z(\delta'), i^* \mathcal{F}) & \longrightarrow \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \longrightarrow & H_{\text{ét}}^n(X(\delta), j_! j^* \mathcal{F}) & \longrightarrow & H_{\text{ét}}^n(X(\delta), \mathcal{F}) & \longrightarrow & H_{\text{ét}}^n(Z(\delta), i^* \mathcal{F}) & \longrightarrow \end{array}$$

où l'on a utilisé le fait que i_* d'une immersion fermée i_* est exacte. Comme $\dim(Z) < \dim(X)$ par densité de U , et que $Z(\delta') \subset^\dagger Z$ est une inclusion stricte d'affinoïdes rigides, l'application verticale en haut à droite est d'image dense par récurrence. Donc, si l'application $H_{\text{ét}}^n(X(\delta'), j_! j^* \mathcal{F}) \rightarrow H_{\text{ét}}^n(X(\delta), j_! j^* \mathcal{F})$ est d'image dense, l'application $H_{\text{ét}}^n(X, \mathcal{F}) \rightarrow H_{\text{ét}}^n(X(\delta), \mathcal{F})$ le sera aussi par (1.4).

Si $l \neq p$, les groupes $H_{\text{ét}}^n(X, \mathcal{F})$ sont déjà des groupes finis d'après [19, Theorem 1.3]. On peut alors supposer que $\mathcal{F} = j_! \mathcal{G}$ et $l = p$. Par dévissage à l'aide de (2.10), on peut supposer qu'il existe un revêtement fini étale $\pi : V \rightarrow U$, de degré premier à p sur chaque composante connexe de U , tel que

$$\pi^* \mathcal{G} \simeq \mathbf{F}_p.$$

Par la méthode de la trace (appliquée au morphisme fini étale π), $\mathcal{G} \rightarrow \pi_* \pi^* \mathcal{G}$ est un facteur direct, donc \mathcal{G}

est un facteur direct de $\pi_*\mathbf{F}_p$. Il existe un morphisme fini $\tilde{\pi} : Y \rightarrow X$ tel que $\pi^{-1}(U) \rightarrow U$ est identifié à π (extension de Riemann), alors $\mathcal{F} = j_!\mathcal{G}$ est un facteur direct de

$$j_!\pi_*\mathbf{F}_p \simeq j_!\pi_!\mathbf{F}_p \simeq \tilde{\pi}_!\tilde{j}_!\mathbf{F}_p \simeq \tilde{\pi}_*\tilde{j}_!\mathbf{F}_p.$$

(Pour un morphisme propre, les $(-)_!$ et $(-)_*$ sont isomorphes.) Donc, par l'exactitude de $\pi_* : \mathbf{Sh}(Y_{\text{ét}}) \rightarrow \mathbf{Sh}(X_{\text{ét}})$ [20, Proposition 2.6.4], d'où l'annulation de $R^i\pi_*$ pour $i > 0$, la question de la finitude pour $H_{\text{ét}}^n(X(\delta'), \mathcal{F}) \rightarrow H_{\text{ét}}^n(X(\delta), \mathcal{F})$ revient à celle pour $H_{\text{ét}}^n(Y \times_X X(\delta'), \tilde{j}_!\mathbf{F}_p) \rightarrow H_{\text{ét}}^n(Y \times_X X(\delta), \tilde{j}_!\mathbf{F}_p)$.

Notons que nous avons l'inclusion stricte d'affinoïdes rigides $Y \times_X X(\delta') \subset^\dagger Y \times_X X(\delta)$ sur K [4, Lemma 7 (iii)]. Donc, en renommant Y comme X et $\tilde{j} : V \rightarrow Y$ comme $j : U \rightarrow X$, on se ramène à démontrer que l'application

$$H_{\text{ét}}^n(X(\delta'), j_!\mathbf{F}_p) \rightarrow H_{\text{ét}}^n(X(\delta), j_!\mathbf{F}_p)$$

est d'image finie. Or, ceci découle aussitôt par le dévissage

$$0 \rightarrow j_!\mathbf{F}_p \rightarrow \mathbf{F}_p \rightarrow i_*\mathbf{F}_p \rightarrow 0$$

et la conjecture (0.3). En effet, pour tout $\delta \in \mathbf{Q} \cap]0, 1[$, en prenant la cohomologie étale sur $X(\delta)$, on obtient la suite exacte longue

$$\cdots \rightarrow H_{\text{ét}}^{n-1}(Z(\delta), \mathbf{F}_p) \rightarrow H_{\text{ét}}^n(X(\delta), j_!\mathbf{F}_p) \rightarrow H_{\text{ét}}^n(X(\delta), \mathbf{F}_p) \rightarrow \cdots$$

Les deux côtés étant à coefficients constants \mathbf{F}_p , la conjecture (0.3) combinée avec lemme 1.4 donne alors la finitude voulue.

Pour la cohomologie étale à support compact, il suffit de traiter le cas de $\mathcal{F} = j_!\mathcal{G}$ où $j : U \rightarrow X$ est l'inclusion d'un ouvert de Zariski dense lisse et \mathcal{G} est un faisceau de \mathbf{F}_p -modules localement constant. Comme précédemment, il existe un revêtement fini étale $\pi : V \rightarrow U$, prolongeable à un morphisme fini $\tilde{\pi} : Y \rightarrow X$, tel que \mathcal{F} soit un facteur direct de $\tilde{\pi}_!\tilde{j}_!\mathbf{F}_p$. Par l'exactitude de $\tilde{\pi}_* \simeq \tilde{\pi}_!$, on se ramène au cas où \mathcal{F} est de la forme $\mathcal{F} = j_!\mathbf{F}_p$. Par le dévissage standard (notant que $i_* \simeq i_!$ car i est une immersion fermé), on obtient la suite exacte

$$\cdots \rightarrow H_{\text{ét},c}^{n-1}(Z(\delta), \mathbf{F}_p) \rightarrow H_{\text{ét},c}^n(X(\delta), j_!\mathbf{F}_p) \rightarrow H_{\text{ét},c}^n(X(\delta), \mathbf{F}_p) \rightarrow \cdots$$

d'où la finitude voulue par la conjecture (0.3) et le lemme 1.4. \square

2.14 - Remark. La constructibilité de Zariski est essentielle dans la preuve, puisque le dévissage là-dedans demande du moins que le fermé complémentaire d'un ouvert considéré porte naturellement une structure d'espace rigide.

2.15 - Corollary. Soit X un espace rigide partiellement propre de dimension d sur K . Supposons que la conjecture (0.3) soit vraie en dimension d . Pour tous $n, m \in \mathbf{N}$, le groupe $H_{\text{ét}}^n(X, \mathcal{F})$ est profini et on a $H_{\text{ét}}^n(X, \mathcal{F}) \rightarrow \lim_i H_{\text{ét}}^n(U_i, \mathcal{F}|_{U_i})$ pour tout faisceau de \mathbf{Z}/n -modules constructible de Zariski \mathcal{F} sur $X_{\text{ét}}$.

Démonstration. Verbatim comme dans la preuve de (2.7). \square

Application : tours de Drinfeld en niveau fini

2.16 - Proposition. Soit X un espace rigide quasi-séparé de dimension d sur K muni d'une action continue d'un groupe localement compact G . Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons que X admette des recouvrements localement finis du type

$$\mathcal{U}_i = \{gU_i\}_{\bar{g} \in G/H}, \quad \forall i = 0, \dots, n$$

où

$$U_0 \subset^\dagger \dots \subset^\dagger U_n$$

est une chaîne stricte d'ouverts admissibles quasi-compacts de X stabilisés par un même sous-groupe ouvert H de G . Supposons que la conjecture (0.3) soit vraie en dimension d . Alors, pour tout faisceau \mathcal{F} constructible de Zariski sur $X_{\text{ét}}$ stable par \mathcal{F} , la $\mathbf{Z}/\mathfrak{p}^m$ -représentation $H_{\text{ét}}^n(X, \mathcal{F})$ continue de G est profinie et admet une filtration finie dont les gradués sont des sous-quotients respectifs des inductions $\text{Ind}_K^G W$, où K est un sous-groupe ouvert d'indice fini de H , et que W est une $\mathbf{Z}/\mathfrak{p}^m$ -représentation finie continue de K .

Démonstration. On a des actions continues naturelles de G sur les $\coprod_{\bar{g} \in G/H} gU_i$, compatible avec les inclusions $gU_i \rightarrow gU_{i+1}$. Dénotons par $\mathbf{Rep}_G^{\text{wcpf}}(\mathbf{Z}/\mathfrak{p}^m) \subset \mathbf{Rep}_G^{\text{cont}}(\mathbf{Z}/\mathfrak{p}^m)$ la sous-catégorie pleine des $\mathbf{Z}/\mathfrak{p}^m$ -représentations profinies admettant une filtration finie comme décrite dans l'énoncé; c'est une sous-catégorie épaisse. Considérons les suites spectrales de Čech convergentes compatibles

$$\begin{array}{ccc} E_1^{i,j}(\mathcal{U}_{t+1}) = \prod_{\bar{g}=(\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_i) \in (G/H)^i} H_{\text{ét}}^j(g_1 U_{t+1} \cap \dots \cap g_i U_{t+1}, \mathcal{F}) & \Longrightarrow & H_{\text{ét}}^{i+j}(X, \mathcal{F}) \\ \downarrow & & \downarrow \text{id} \\ E_1^{i,j}(\mathcal{U}_t) = \prod_{\bar{g}=(\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_i) \in (G/H)^i} H_{\text{ét}}^j(g_1 U_t \cap \dots \cap g_i U_t, \mathcal{F}) & \Longrightarrow & H_{\text{ét}}^{i+j}(X, \mathcal{F}) \end{array}$$

Par quasi-séparabilité, on a $g_1 U_t \cap \dots \cap g_i U_t \subset^\dagger g_1 U_{t+1} \cap \dots \cap g_i U_{t+1}$, donc la flèche verticale en chaque composante du produit est d'image finie, dénotée $A_{1, \bar{g}}^{i,j}(t)$, par la proposition 2.13. D'après (1.8), il suffit alors de montrer que la représentation $\prod_{\bar{g} \in (G/H)^i} A_{1, \bar{g}}^{i,j}(t)$ appartient à $\mathbf{Rep}_G^{\text{wcpf}}(\mathbf{Z}/\mathfrak{p}^m)$, ce qui revient à étudier les G -orbites dans $(G/H)^i$ telles que $g_1 U_{t+1} \cap \dots \cap g_i U_{t+1}$ ne soit pas vide pour tout (ou un) $\bar{g} = (\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_i)$ dans cette orbite. D'une part, par l'hypothèse de la finitude locale des recouvrements \mathcal{U}_t , il n'y a qu'un nombre fini de telles orbites. D'autre part, pour tout $\bar{g} = (\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_i) \in (G/H)^i$, son stabilisateur sous l'action diagonale de G est

$$G_{\bar{g}} = g_1 H g_1^{-1} \cap \dots \cap g_i H g_i^{-1}$$

un sous-groupe ouvert d'indice fini de $g_1 H g_1^{-1}$. Donc $G_{g_1^{-1} \bar{g}}$ est un sous-groupe ouvert d'indice fini de H . Pour conclure, notons que

$$\prod_{\bar{g}' \in G/H} A_{1, \bar{g}'}^{i,j}(t) \simeq \text{Ind}_{G_{g_1^{-1} \bar{g}}}^G A_{1, g_1^{-1} \bar{g}}^{i,j}(t)$$

pour tout $\bar{g} = (\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_i) \in (G/H)^i$. \square

2.17 - Example. Soit $\Omega_K^{d-1} = \mathbf{P}^{d-1} \setminus \mathbf{P}^{d-1}(K)$ le demi-espace de Drinfeld sur K où $d \geq 2$ est un entier. Soit

$$\dots \rightarrow \mathcal{M}_n \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_0 \rightarrow \Omega_K^{d-1}$$

la tour de Drinfeld, modèles rigides analytiques sur K des espaces rigides analytiques $\mathcal{M}_{n, \bar{K}} / \varpi_K^{\mathbf{Z}}$ construite dans [10] (pour rappel, $\mathcal{M}_{0, \bar{K}} = (\Omega_K^{d-1})_{\bar{K}} \times \mathbf{Z}$ et l'action de ϖ_K décale la deuxième coordonnée n par $d = v_{\varpi_K}(\det(\text{diag}(\varpi_K, \dots, \varpi_K)))$). Le groupe de Lie \mathfrak{p} -adique $\mathbf{GL}_d(K)$ agit de façon continue et équivariante sur la tour de Drinfeld, avec son centre Z agissant trivialement. Alors pour toute extension finie L de K , l'espace rigide $\mathcal{M}_{n, L}$ changement de base de \mathcal{M}_n vers L vérifie les conditions ci-dessus avec $G = \mathbf{GL}_d(K)$. Si la conjecture (0.3) était valide en dimension d , alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, la $\mathbf{Z}/\mathfrak{p}^m$ -représentation $H_{\text{ét}}^n(\mathcal{M}_{n, L}, \mathbf{Z}/\mathfrak{p}^m)$ de $\mathbf{GL}_d(K)$ serait profini, extension de sous-quotients de la forme $\text{Ind}_{KZ}^G W$, où K est un sous-groupe ouvert d'indice fini de $I(1)$ le sous-groupe *pro- p -Iwahori standard*, et que W est une $\mathbf{Z}/\mathfrak{p}^m$ -représentation finie continue de KZ ⁴.

4. C'est plus faible qu'être de *présentation finie*.

Démonstration. En effet, comme les morphismes $\mathcal{M}_{n,L} \rightarrow \mathcal{M}_n \rightarrow \Omega_K^{d-1}$ d'espaces rigides sur K sont finis étales, en particulier propres, il suffit de trouver une paire $U \subset^\dagger U'$ d'ouverts quasi-compacts admissibles dans l'espace rigide de base Ω_K^{d-1} stabilisé par un sous-groupe ouvert H de G . Par exemple, en suivant la notation de [14, III, 1] : soit \mathcal{BT} l'immeuble de Bruhat-Tits de $\mathbf{PGL}_d(K)$; soit Δ le simplexe de dimension $d-1$ (c'est aussi la dimension de \mathcal{BT}) correspondant à la chaîne standard

$$\pi\mathcal{O}_K^{\oplus d} \subset \pi\mathcal{O}_K^{\oplus(d-1)} \oplus \mathcal{O}_K \subset \mathcal{O}_K^{\oplus d} \subset \dots \subset \pi\mathcal{O}_K \oplus \mathcal{O}_K^{\oplus(d-1)} \subset \mathcal{O}_K^{\oplus d};$$

on peut alors prendre

$$U_t := \bigcup_{\substack{\Delta' \in |\mathcal{BT}| \\ d(\Delta', \Delta) \leq t}} (\widehat{\Omega}_{\Delta'}^0)_\eta$$

et

$$H := I(1)Z,$$

où $d(\Delta', \Delta) \leq t$ signifie que Δ' peut être connecté à Δ par une chaîne de simplexes adjacents de dimension $d-1$ de longueur t , i.e. $\Delta' = \Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_s = \Delta$. \square

3 Cas des modèles semi-stables d'une stricte inclusion

3.1 - Lemma ([27, Lemma 2.5]). *Soit $\mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{X}$ une immersion ouverte d'un ouvert quasi-compact dans un schéma formel admissible sur \mathcal{O}_K telle que $\mathfrak{U}_\eta \subset^\dagger \mathfrak{X}_\eta$ est une inclusion stricte d'affinoïdes rigides. Alors l'application de fibres spéciales $\mathfrak{U}_s \rightarrow \mathfrak{X}_s$ se factorise par son adhérence de Zariski $\overline{\mathfrak{U}}_s$ dans \mathfrak{X}_s qui est propre sur k .*

Démonstration. Par hypothèse, on a des inclusions d'affinoïdes rigides $\mathfrak{U}_\eta \subset \mathfrak{X}_\eta(r) \subset \mathfrak{X}_\eta$ pour certain $r \in \mathbf{Q} \cap]0, 1[$ et une présentation $\mathfrak{X}_\eta = \mathrm{Sp}(K\langle T_1, \dots, T_m \rangle / J)$. Dénotons A l'image de

$$\mathcal{O}_K\langle T_1, \dots, T_m \rangle \rightarrow K\langle T_1, \dots, T_m \rangle / J,$$

et dénotons $A(r)$ l'image de

$$\mathcal{O}_K\langle T_1, \dots, T_m, S_1, \dots, S_m \rangle \rightarrow K\langle T_1, \dots, T_m, S_1, \dots, S_m \rangle / (J, T_1^{r_2} - p^{r_1} S_1, \dots, T_m^{r_2} - p^{r_1} S_m),$$

où $r = \frac{r_1}{r_2}$ avec $r_1, r_2 \in \mathbf{N}$. Elles sont des \mathcal{O}_K -algèbres p -adiquement complètes admissibles, et on a un morphisme naturel $\mathrm{Spf} A(r) \rightarrow \mathrm{Spf} A$ qui donne sur la fibre générique l'inclusion $\mathfrak{X}_\eta(r) \subset \mathfrak{X}_\eta$, et sur la fibre spéciale l'inclusion du point fermé s_0 dans $\mathrm{Spec}(A/\varpi_K)$ défini par l'idéal maximal $(T_1, \dots, T_m, S_1, \dots, S_m)$.

D'après la théorie de Raynaud, on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{U} & \xrightarrow{\quad} & \mathfrak{X} & & \\ \uparrow & & \uparrow & & \\ \mathfrak{U}'' & \xrightarrow{\quad} & \mathfrak{X}'' & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathfrak{U}' & \searrow & & & \\ \mathrm{Spf} A_U & & \mathrm{Spf} A(r) & \longrightarrow & \mathrm{Spf} A \end{array}$$

où les flèches verticales sont des éclatements formels admissibles, donc propres sur les fibres spéciales, et que les flèches horizontales sont des immersions ouvertes. L'image de $\mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{X}$ est aussi l'image de $\mathfrak{U}'' \rightarrow \mathfrak{X}'' \rightarrow \mathfrak{X}$. Or, le morphisme $\mathfrak{U}'' \rightarrow \mathfrak{X}''$ se factorise dans une fibre projective car $\mathrm{Spf} A(r) \rightarrow \mathrm{Spf} A$ se factorise par $\{s_0\}$,

son adhérence est alors propre⁵. Son image schématique dans \mathfrak{X}_s , qui est propre [36, Lemma 0AH6], est aussi l'adhérence de \mathfrak{U}_s dans \mathfrak{X}_s ⁶. \square

3.2 - Corollary. *Soit $\mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{X}$ une immersion ouverte d'un ouvert quasi-compact dans un schéma formel admissible séparé sur \mathcal{O}_K telle que $\mathfrak{U}_\eta \subset^\dagger \mathfrak{X}_\eta$ est une inclusion stricte (pas forcément entre des affinoïdes). Alors l'application de fibres spéciales $\mathfrak{U}_s \rightarrow \mathfrak{X}_s$ se factorise par son adhérence de Zariski $\overline{\mathfrak{U}_s}$ dans \mathfrak{X}_s qui est propre sur k .*

Démonstration. On peut supposer d'avoir des recouvrements admissibles finis affinoïdes

$$\mathfrak{U}_\eta = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \subset^\dagger \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha \subset \mathfrak{X}_\eta$$

avec des inclusions stricte $U_\alpha \subset^\dagger V_\alpha$ d'ouverts affinoïdes admissible. On a alors un diagramme commutatif comme suit

$$\begin{array}{ccccccc} \mathfrak{U}' & = & \bigcup_{\alpha} \mathfrak{U}'_{\alpha} & \subset & \bigcup_{\alpha} \mathfrak{B}'_{\alpha} & \subset & \mathfrak{X}' \\ & & \cup & & \cup & & \\ & & \mathfrak{U}'_{\alpha} & \subset & \mathfrak{B}'_{\alpha} & & \\ \downarrow & & & & & & \downarrow \\ \mathfrak{U} & & & \subset & & & \mathfrak{X} \end{array}$$

où les flèches verticales sont des éclatements formels admissibles, donc propres sur les fibres spéciales, et que les flèches horizontales sont des immersions ouvertes. Alors l'application de fibres spéciales $(\mathfrak{U}'_{\alpha})_s \rightarrow (\mathfrak{B}'_{\alpha})_s \subset \mathfrak{X}'_s$ se factorise par son adhérence de Zariski $\overline{(\mathfrak{U}'_{\alpha})_s}$ dans $(\mathfrak{B}'_{\alpha})_s$, qui est propre sur k par le lemme 3.1. Donc $\overline{(\mathfrak{U}'_{\alpha})_s}$ est aussi son adhérence dans \mathfrak{X}'_s puisque le morphisme d'un schéma propre sur k vers un schéma séparé sur k est propre [17, Corollaire 5.4.3]. Alors l'application de fibres spéciales $\mathfrak{U}'_s \rightarrow \mathfrak{X}'_s$ se factorise par son adhérence dans \mathfrak{X}'_s , qui est l'image schématique du morphisme $\coprod_{\alpha} \overline{(\mathfrak{U}'_{\alpha})_s} \rightarrow \mathfrak{X}'_s$. Or, ceci est propre sur k ⁷, donc $\mathfrak{U}_s \rightarrow \mathfrak{X}_s$ se factorise par un sous-schéma fermé de \mathfrak{X}_s qui est propre sur k . \square

3.3 - Lemma. *Soit Y un schéma localement noethérien. Soit $V \rightarrow Y$ un ouvert. Considérons le sous-schéma ouvert*

$$V^{\text{sat}} := Y \setminus \overline{(Y \setminus V)},$$

où $\overline{(-)}$ dénote l'adhérence schématique.

(i) *On a $V \subset V^{\text{sat}} \subset \overline{V}$.*

(ii) *Supposons que localement pour la topologie fidèlement plate de présentation finie sur Y , chacune de ses composantes irréductibles soit définie par une seule section globale. Alors l'immersion ouverte $j : V^{\text{sat}} \rightarrow Y$ est un morphisme affine.*

(iii) *Dénotons par \bar{j} l'immersion fermée $\overline{V} \rightarrow Y$. Soit \mathcal{F} un faisceau sur $Y_{\text{ét}}$ admettant une filtration finie $\text{Fil}^\bullet \mathcal{F}$ dont chaque gradué $\text{gr}^\bullet \mathcal{F}$ est muni d'une structure de faisceau cohérent. Posons*

$$\mathcal{K} := \ker(\mathcal{F} \rightarrow j_* j^* \mathcal{F})$$

muni de la filtration restreinte $\text{Fil}^\bullet \mathcal{K} = \mathcal{K} \cap \text{Fil}^\bullet \mathcal{F}$, et

$$\mathcal{G} := \mathcal{F}/\mathcal{K} \simeq \text{im}(\mathcal{F} \rightarrow j_* j^* \mathcal{F})$$

5. Si une immersion ouverte $U \subset X$ se factorise par un schéma fermé $Z \rightarrow X$, alors $U \rightarrow Z$ est une immersion ouverte. En effet, $U \rightarrow Z$ est un homéomorphisme sur une partie ouverte de Z , et que pour tout $x \in U$, on a $\mathcal{O}_{Z,x} \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_{U,x}$ [?, Proposition 4.2.2, a)], puisque $\mathcal{O}_{X,x} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{Z,x} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{U,x}$ dont le composé est un isomorphisme.

6. Notons f le morphisme $\mathfrak{X}'_s \rightarrow \mathfrak{X}_s$. L'adhérence de \mathfrak{U}'_s dans \mathfrak{X}'_s est projective; notons-la $\overline{\mathfrak{U}'_s}$. L'adhérence de \mathfrak{U}_s dans \mathfrak{X}_s est l'image schématique par f de $\overline{\mathfrak{U}'_s}$; en effet, on a $\ker(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'_s} \rightarrow i_* \mathcal{O}_{\mathfrak{U}'_s}) \subset \ker(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'_s} \rightarrow f_* i'_* \mathcal{O}_{\mathfrak{U}'_s})$, avec égalité si f_* est un éclatement.

7. Soit \mathcal{I}_α le faisceaux d'idéaux de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'_s}$ définissant $\overline{(\mathfrak{U}'_{\alpha})_s}$, alors cette adhérence et image schématique est définie par le faisceaux d'idéaux $\bigcap_{\alpha} \mathcal{I}_\alpha$. Une simple application du critère valuatif de propreté permettra de conclure.

muni de la filtration quotient $\text{Fil}^\bullet \mathcal{G}$, image de $\text{Fil}^\bullet \mathcal{F}$. Alors,

- $j^* \mathcal{K} = 0$, $\mathcal{K}|_{Y \setminus \bar{V}} \xrightarrow{\cong} \mathcal{F}_{Y \setminus \bar{V}}$ et $\mathcal{G} \xrightarrow{\cong} \bar{j}_* \bar{j}^* \mathcal{G}$;
- Sous la condition de (ii), si de plus le morphisme naturel

$$(3.3.1) \quad \text{Fil}^\bullet \mathcal{K} \rightarrow \ker(\text{gr}^\bullet \mathcal{F} \xrightarrow{\gamma_\bullet} j_* j^* \text{gr}^\bullet \mathcal{F})$$

est de conoyau un faisceau extension successive de faisceaux cohérents, alors les gradués $\text{gr}^\bullet \mathcal{G}$ sont respectivement des extensions successives de faisceaux cohérents; plus précisément, on a la suite exacte naturelle suivante

$$0 \rightarrow \ker(\gamma_\bullet) / \text{gr}^\bullet \mathcal{K} \rightarrow \text{gr}^\bullet \mathcal{G} \rightarrow \text{im}(\gamma_\bullet) \rightarrow 0$$

où le faisceau de gauche est isomorphe au conoyau de (3.3.1) et est une extension successive de faisceaux cohérents supportés sur $Y \setminus V^{\text{sat}}$, et le faisceau de droite est naturellement cohérent supporté sur \bar{V} .

Démonstration. (i) C'est clair.

(ii) La propriété que $j : V^{\text{sat}} \rightarrow Y$ est un morphisme affine se vérifie localement pour la topologie fidèlement plate quasi-compacte sur Y [18, Proposition 2.7.1, (xiii)] (qui est plus fine que la topologie fidèlement plate de présentation finie).

Soit $g : Y' \rightarrow Y$ un morphisme plat et localement de présentation finie. Dénotons

$$V'^{\text{sat}} := Y' \setminus \overline{Y' \setminus g^{-1}(V)}.$$

Montrons que $V'^{\text{sat}} = g^{-1}(V^{\text{sat}})$. Pour cela, il suffit de montrer que

- (a) $\overline{g^{-1}(W)} \xrightarrow{\cong} g^{-1}(\overline{W})$ pour tout ouvert $W \subset Y$;
- (b) $g^{-1}(Y \setminus Z) \xrightarrow{\cong} Y' \setminus g^{-1}(Z)$ pour tout fermé $Z \subset Y$.

Le (b) est clair. Le (a) est vraie emsemblistement, puisque l'on a $\overline{g^{-1}(W)} \subset g^{-1}(\overline{W})$ par continuité de g , et l'inclusion inverse car g est ouvert en étant et plat localement de présentation finie [18, Theorem 2.4.6].

Par hypothèse, en travaillant localement pour la topologie fidèlement plate de présentation finie sur Y , on peut supposer que Y est un schéma affine noéthérien, et que ses composantes irréductibles $\{Y_i\}_{i \in I}$ sont de la forme $Y_i = V(f_i)$ pour certain $f_i \in \mathcal{O}(Y)$. Comme Y est noéthérien, l'ensemble I est fini. Soit $I_0 \subset I$ le sous-ensemble des i tels que V rencontre Y_i . Alors, on a $\bar{V} = \bigcup_{i \in I_0} Y_i$, puis $Y \setminus \bar{V} = \bigcup_{i \notin I_0} (Y_i \setminus (\bigcup_{i \in I_0} Y_i))$, donc

$$\overline{Y \setminus \bar{V}} = \bigcup_{i \notin I_0} Y_i = \bigcup_{i \notin I_0} V(f_i) = V\left(\prod_{i \notin I_0} f_i\right).$$

Ainsi, son complémentaire V^{sat} dans Y est identifié comme l'ouvert principal $D(\prod_{i \notin I_0} f_i) \subset Y$, qui est affine.

(iii) Le premier point est clair. Montrons le deuxième point. D'après (ii), l'immersion ouvert j est affine, donc $R^1 j_* \mathcal{H} = 0$ pour tout faisceau cohérent \mathcal{H} sur V^{sat} (et pour la topologie étale, ou même la topologie fidèlement plate de présentation finie). On en déduit par récurrence sur la longueur de la filtration $\text{Fil}^\bullet \mathcal{F}$ (et par l'exactitude de j^*) que pour tout $m \in \mathbf{N}$, on a que $R^1 j_* j^* \text{Fil}^\bullet \mathcal{F} = 0$ et que la suite courte (exacte à gauche)

$$0 \rightarrow j_* j^* \text{Fil}^{m+1} \mathcal{F} \rightarrow j_* j^* \text{Fil}^m \mathcal{F} \rightarrow j_* j^* \text{gr}^m \mathcal{F} \rightarrow 0$$

est exacte à droite, donc elle est exacte.

On dispose du diagramme commutatif suivant

$$(3.3.2) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{Fil}^{m+1}\mathcal{K} & \longrightarrow & \mathrm{Fil}^m\mathcal{K} & \longrightarrow & \ker(\gamma_m) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Fil}^{m+1}\mathcal{F} & \longrightarrow & \mathrm{Fil}^m\mathcal{F} & \longrightarrow & \mathrm{gr}^m\mathcal{F} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \gamma_m \\ 0 & \longrightarrow & j_*j^*\mathrm{Fil}^{m+1}\mathcal{F} & \longrightarrow & j_*j^*\mathrm{Fil}^m\mathcal{F} & \longrightarrow & j_*j^*\mathrm{gr}^m\mathcal{F} \longrightarrow 0 \end{array}$$

dont la ligne centrale et les colonnes sont exactes par définitions. La dernière ligne est exacte d'après ce qui précède, et puis la première est exacte par le lemme du serpent. Ceci étant, on obtient le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{Fil}^{m+1}\mathcal{K} & \longrightarrow & \mathrm{Fil}^m\mathcal{K} & \longrightarrow & \mathrm{gr}^m\mathcal{K} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Fil}^{m+1}\mathcal{F} & \longrightarrow & \mathrm{Fil}^m\mathcal{F} & \longrightarrow & \mathrm{gr}^m\mathcal{F} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Fil}^{m+1}\mathcal{G} & \longrightarrow & \mathrm{Fil}^m\mathcal{G} & \longrightarrow & \mathrm{gr}^m\mathcal{G} \longrightarrow 0 \end{array}$$

dont les colonnes sont exactes et dont la dernière ligne est exacte par le lemme du serpent. Ainsi, on obtient une suite exacte

$$0 \rightarrow \ker(\gamma_m)/\mathrm{gr}^m\mathcal{K} \rightarrow \mathrm{gr}^m\mathcal{G} \rightarrow \mathrm{im}(\gamma_m) \rightarrow 0$$

par le lemme du serpent appliqué au diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{gr}^m\mathcal{K} & \longrightarrow & \mathrm{gr}^m\mathcal{F} & \longrightarrow & \mathrm{gr}^m\mathcal{G} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \mathrm{id} & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \ker(\gamma_m) & \longrightarrow & \mathrm{gr}^m\mathcal{F} & \longrightarrow & \mathrm{im}(\gamma_m) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Il reste à voir que les deux faisceaux de côté, $\ker(\gamma_m)/\mathrm{gr}^m\mathcal{K}$ et $\mathrm{im}(\gamma_m)$, vérifie les propriétés de cohérence voulues. En effet, remarquons d'abord que $\ker(\gamma_m)$ et $\mathrm{im}(\gamma_m)$ héritent la cohérence de $\mathrm{gr}^m\mathcal{F}$. Pour ceci, on remarque que $j_*j^*\mathrm{gr}^m\mathcal{F}$ est un faisceau quasi-cohérent sur $Y_{\mathrm{ét}}$ puisque Y est localement noethérien [16, Proposition 9.4.2]. Le morphisme naturel γ_m est un morphisme de \mathcal{O}_Y -modules sur $Y_{\mathrm{ét}}$, donc $\ker(\gamma_m)$ et $\mathrm{im}(\gamma_m)$ sont aussi quasi-cohérents, même cohérents car ils sont de type fini. Quant à leurs supports, $\ker(\gamma_m)$ est supporté sur $Y \setminus V^{\mathrm{sat}}$ car γ_m est un isomorphisme sur l'ouvert $V^{\mathrm{sat}} \subset Y$; et $\mathrm{im}(\gamma_m)$ est supporté sur \bar{V} car $j_*j^*\mathrm{gr}^m\mathcal{F}$ l'est. L'hypothèse supplémentaire (3.3.1) revient au même de dire que le sous-faisceau $\mathrm{gr}^m\mathcal{K} \subset \ker(\gamma_m)$ est de quotient extension successive de faisceaux cohérents, donc $\ker(\gamma_m)/\mathrm{gr}^m\mathcal{K}$ est une extensions successives de faisceaux cohérents. \square

3.4 - Remark. La clef de la preuve est le fait que si \mathcal{F} est un faisceau étale cohérent sur un schéma localement noethérien Y , alors pour tout immersion ouverte $j : V \rightarrow Y$, l'image du morphisme de faisceaux $\mathcal{F} \rightarrow j_*j^*\mathcal{F}$ est cohérent [16, Proposition 9.4.2].

3.5 - Corollary. *Soit*

$$\mathfrak{X} = \mathrm{Spf} \mathcal{O}_K \langle X_0, \dots, X_n \rangle / (X_0 \cdots X_r - \varpi^v)$$

avec $v \in \mathbf{N}^*$ et $0 \leq r \leq n$; soient $Y = \mathfrak{X}_s$ et V un ouvert de Zariski dense dans

$$V^{\mathrm{sat}} = \mathrm{Spec} k[X_0, \dots, X_s, X_{s+1}^{\pm 1}, \dots, X_r^{\pm 1}, X_{r+1}, \dots, X_n] / (X_0 \cdots X_s) \stackrel{j}{\subset} Y$$

pour certain entier $0 \leq s \leq r$. Posons $f = X_0 \cdots X_s$ pour certain entier $0 \leq s \leq r$ et $g = X_{s+1} \cdots X_r$.

Soit $\mathcal{F} = U^1 R^q \lambda_* \mu_p^{\otimes q}$. Dénotons $\mathcal{K} = \ker(\mathcal{F} \rightarrow j_* j^* \mathcal{F})$, $\mathcal{G} = \text{im}(\mathcal{F} \rightarrow j_* j^* \mathcal{F})$ et U^m, V^m les filtrations de Bloch-Kato-Hyodo induites là-dessus; dénotons leurs gradués par

$$\text{gr}_0^m = U^m / V^m$$

$$\text{gr}_1^m = V^m / U^{m+1}$$

pour $m \in \mathbf{N}^*$ et \mathcal{K}, \mathcal{F} et \mathcal{G} . Dénotons également

$$\gamma_{m,0} : \text{gr}_0^m R^q \lambda_* \mathbf{F}_p \rightarrow j_* j^* \text{gr}_0^m R^q \lambda_* \mathbf{F}_p$$

$$\gamma_{m,1} : \text{gr}_1^m R^q \lambda_* \mathbf{F}_p \rightarrow j_* j^* \text{gr}_1^m R^q \lambda_* \mathbf{F}_p$$

pour $m \in \mathbf{N}^*$.

Pour tout $m \in \mathbf{N}^*$, soit $\alpha_m \in \mathbf{N}$ tel que $m + p\alpha_m v \geq e'$. On a

$$\bar{f}^{\alpha_m} \cdot \text{gr}_i^m \mathcal{F} \subset \text{gr}_i^m \mathcal{K} \subset \ker(\gamma_{m,i}) \subset \text{gr}_i^m \mathcal{F}$$

pour $i \in \{0,1\}$, où sur le premier terme on considère la structure de \mathcal{O}_Y -module (cohérent) (1.16) sur $\text{gr}_i^m \mathcal{F}$. En particulier, $\ker(\gamma_{m,i})/\text{gr}_i^m \mathcal{K}$ est un faisceau supporté sur

$$\bar{V} \setminus V^{\text{sat}} = V(\bar{f}, \bar{g}) = \text{Spec } k[X_0, \dots, X_s, X_{s+1}^{\pm 1}, \dots, X_r^{\pm 1}, X_{r+1}, \dots, X_n] / (X_0 \cdots X_s, X_{s+1} \cdots X_r).$$

Démonstration. On a

$$V \subset V^{\text{sat}} = D(\bar{g}) \subset \bar{V} = V(\bar{f}) \subset Y$$

qui, avec la filtration de Bloch-Kato-Hyodo sur $\mathcal{F} = U^1 R^q \lambda_* \mu_p^{\otimes q}$, vérifient toutes les conditions de (3.3). Donc $\ker(\gamma_{m,i})$ est supporté sur $Y \setminus V^{\text{sat}} = V(\bar{g})$ pour tout $m \in \mathbf{N}^*$; alors $\ker(\gamma_{m,i})/\text{gr}_i^m \mathcal{K}$ l'est aussi.

Le sous- \mathcal{O}_Y -module cohérent $\bar{f}^{\alpha_m} \cdot \text{gr}_0^m \mathcal{F} \subset \text{gr}_0^m \mathcal{F}$ est engendré par les formes différentielles logarithmiques

$$\bar{f}^{p\alpha_m} \bar{x} \cdot \wedge_{i=1}^{q-1} \text{dlog } \bar{a}_i$$

pour $x \in \mathcal{O}_{\bar{x}}$ et $a_i \in \mathcal{O}_{\bar{x}}^\times \cup \{X_i\}_{i=0}^r$, qui possèdent des antécédents

$$\{1 + \varpi^m \bar{f}^{p\alpha_m} x, a_1, \dots, a_{q-1}\} \in U^m \mathcal{F}.$$

On vérifie que

$$\begin{aligned} & \{1 + \varpi^m \bar{f}^{p\alpha_m} x, a_1, \dots, a_{q-1}\}|_{\mathcal{U}_s} \\ &= \{1 + \varpi^m \bar{f}|_{\mathcal{U}}^{p\alpha_m} x|_{\mathcal{U}}, a_1|_{\mathcal{U}}, \dots, a_{q-1}|_{\mathcal{U}}\} \\ &= \{1 + \varpi^{m+p\alpha_m v} g^{-p\alpha_m} x|_{\mathcal{U}}, a_1|_{\mathcal{U}}, \dots, a_{q-1}|_{\mathcal{U}}\} \in U^{m+p\alpha_m v} \mathcal{F}|_{\mathcal{U}_s} \subset U^{e'} \mathcal{F}|_{\mathcal{U}_s} = 0. \end{aligned}$$

Donc $\{1 + \varpi^m \bar{f}^{p\alpha_m} x, a_1, \dots, a_{q-1}\} \in \mathcal{K}$. Ainsi, tout $\bar{f}^{p\alpha_m} \bar{x} \cdot \wedge_{i=1}^{q-1} \text{dlog } \bar{a}_i$ possède un antécédent dans $U^m \mathcal{K}$, c'est-à-dire que $\bar{f}^{\alpha_m} \cdot \text{gr}_0^m \mathcal{F} \subset \text{gr}_0^m \mathcal{K}$. De même manière, nous obtenons l'inclusion $\bar{f}^{\alpha_m} \cdot \text{gr}_1^m \mathcal{F} \subset \text{gr}_1^m \mathcal{K}$. Les autres inclusions sont triviales.

En particulier, sur l'ouvert $D(\bar{f})$, les inclusions deviennent des identités, donc le faisceau $\ker(\gamma_{m,i})/\text{gr}_i^m \mathcal{K}$ est supporté sur $V(\bar{f})$ pour tous $m \in \mathbf{N}^*$ et $i \in \{0,1\}$. \square

3.6 - Proposition. Soit $\mathcal{U} \rightarrow \mathfrak{X}$ une immersion ouverte d'un ouvert quasi-compact dans un schéma formel quasi-compact séparé semi-stable de dimension relative 1 sur \mathcal{O}_K telle que $\mathcal{U}_\eta \subset^\dagger \mathfrak{X}_\eta$ est une inclusion stricte. Supposons que $\zeta_p \in K$. Les applications

$$H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{X}_s, R^j \lambda_* \mathbf{F}_p) \rightarrow H_{\text{ét}}^i(\mathcal{U}_s, R^j \lambda_* \mathbf{F}_p|_{\mathcal{U}_s})$$

et

$$H_{\text{ét},c}^i(\mathfrak{U}_s, \text{gr}_U^0 R^j \lambda_* \mathbf{F}_\rho|_{\mathfrak{U}_s}) \rightarrow H_{\text{ét},c}^i(\mathfrak{X}_s, \text{gr}_U^0 R^j \lambda_* \mathbf{F}_\rho)$$

$$H_{\text{ét},c}^i(\mathfrak{U}_s, U^1 R^j \lambda_* \mathbf{F}_\rho|_{\mathfrak{U}_s}) \rightarrow H_{\text{ét},c}^i(\mathfrak{X}_s, U^1 R^j \lambda_* \mathbf{F}_\rho)$$

sont d'image finie. En particulier, si de plus $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{U}$ est un ouvert quasi-compact tel que $\mathfrak{B}_\eta \subset^\dagger \mathfrak{U}_\eta$ est une inclusion stricte, alors les applications $H_{\text{ét},c}^i(\mathfrak{B}_s, R^j \lambda_* \mathbf{F}_\rho|_{\mathfrak{B}_s}) \rightarrow H_{\text{ét},c}^i(\mathfrak{X}_s, R^j \lambda_* \mathbf{F}_\rho)$ sont d'image finie.

Démonstration. Soit $q \in \mathbf{N}$. Comme $\zeta_\rho \in K$, on a $R^q \lambda_* \mathbf{F}_\rho \simeq R^q \lambda_* \mu_\rho^{\otimes q}$. Nous allons appliquer le lemme (3.3, iii) à $Y = \mathfrak{X}_s$, $V = \mathfrak{U}_s$ et $\mathcal{F} = U^1 R^q \lambda_* \mu_\rho^{\otimes q}$ muni de la filtration de Bloch-Kato-Hyodo (1.15). Pour ceci, vérifions que ses conditions sont remplies. Conservons les notations du lemme (3.3, iii); nous allons en fait montrer que les $\ker(\gamma_{m,i})/\text{gr}_i^m \mathcal{K}$ pour $m \in \mathbf{N}^*$ et $i \in \{0,1\}$ sont des faisceaux gratte-ciel constructibles.

Soit $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$, le faisceau d'idéaux définissant le sous-schéma fermé $\overline{V} = \overline{\mathfrak{U}}_s \subset \mathfrak{X}_s$ qui est réduit. Pour tout $m \in \mathbf{N}^*$, soit α_m le plus petit entier naturel tel que $m + \rho \alpha_m \geq e'$. Comme une conséquence directe de (3.5), on obtient que

$$(3.6.1) \quad \mathcal{I}^{\alpha_m} \cdot \text{gr}_i^m \mathcal{F} \subset \text{gr}_i^m \mathcal{K} \subset \ker(\gamma_{m,i}) \subset \text{gr}_i^m \mathcal{F}.$$

En effet, il suffit de montrer la première inclusion. Comme \mathfrak{X} est semi-stable sur \mathcal{O}_K , localement pour la topologie étale, on a

$$\mathfrak{X} = \text{Spf } \mathcal{O}_K \langle X_0, \dots, X_n \rangle / (X_0 \cdots X_r - \varpi^v)$$

avec $v \in \mathbf{N}$ et $0 \leq r \leq n$. Si on a $\overline{\mathfrak{U}}_s = \emptyset$ ou $\overline{\mathfrak{U}}_s = \mathfrak{X}_s$, alors $\mathcal{I} = \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ et $\mathcal{K} = \mathcal{F}$, ou $\mathcal{I} = 0$ et $\mathcal{K} = \ker(\gamma_{m,i}) = 0$; le résultat est trivial dans ce cas. On peut donc supposer $v > 0$ et $f = X_0 \cdots X_s$ avec $0 < s < r$, alors $\mathcal{I} = \bar{f} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ et le (3.5) donne (3.6.1).

Pour $m \in \mathbf{N}^*$ et $i \in \{0,1\}$, le faisceau $\ker(\gamma_{m,i})/\mathcal{I}^{\alpha_m} \cdot \text{gr}_i^m \mathcal{F}$ est cohérent et supporté sur $\overline{\mathfrak{U}}_s \setminus \mathfrak{U}_s^{\text{sat}}$ comme on le voit localement. Comme \mathfrak{X} est de dimension relative 1 sur \mathcal{O}_K , l'ensemble $\overline{\mathfrak{U}}_s \setminus \mathfrak{U}_s^{\text{sat}}$ est une partie discrète de points fermés comme on le voit localement pour la topologie étale; cet ensemble est fini par la propriété de \mathfrak{U}_s sur k . Ainsi, le faisceau $\ker(\gamma_{m,i})/(\mathcal{I}^{\alpha_m} \cdot \text{gr}_i^m \mathcal{F})$ est un faisceau cohérent gratte-ciel supporté sur un nombre fini de points fermés; il est alors un faisceau constructible car k une extension finie de \mathbf{F}_ρ ; donc l'est aussi son quotient d'après (3.6.1) $\ker(\gamma_{m,i})/\text{gr}_i^m \mathcal{K}$.

Passons maintenant à la cohomologie. Traitons d'abord le cas de la cohomologie étale. Appliquons le lemme (3.3, iii) à $Y = \mathfrak{X}_s$, $V = \mathfrak{U}_s$ et $\mathcal{F} = U^1 R^q \lambda_* \mu_\rho^{\otimes q}$ muni de la filtration de Bloch-Kato-Hyodo (1.15). La filtration de Bloch-Kato-Hyodo induite sur $\mathcal{G} = \text{im}(\mathcal{F} \rightarrow j_* j^* \mathcal{F}) = \mathcal{F}/\mathcal{K}$ se raffine par une autre dont les gradués sont des faisceaux cohérents supportés sur $\overline{\mathfrak{U}}_s$ ou des faisceaux cohérents constructibles sur $\overline{\mathfrak{U}}_s \setminus \mathfrak{U}_s$. Notons que le faisceau $R^q \lambda_* \mathbf{F}_\rho/\mathcal{F}$ est une extension de faisceaux constructibles (1.15). Donc $R^q \lambda_* \mathbf{F}_\rho/\mathcal{K}$ est une extension successive de faisceaux constructibles et faisceaux cohérents supportés sur $\overline{\mathfrak{U}}_s$; donc sa restriction $R^q \lambda_* \mathbf{F}_\rho/\mathcal{K}|_{\overline{\mathfrak{U}}_s}$ est une extensions successive de faisceaux constructibles et faisceaux cohérents. Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{X}_s, R^j \lambda_* \mathbf{F}_\rho) & \longrightarrow & H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{X}_s, R^j \lambda_* \mathbf{F}_\rho/\mathcal{K}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ & & H_{\text{ét}}^i(\overline{\mathfrak{U}}_s, R^j \lambda_* \mathbf{F}_\rho/\mathcal{K}|_{\overline{\mathfrak{U}}_s}) \\ & & \downarrow \\ H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{U}_s, \mathcal{F}|_{\mathfrak{U}_s}) & \xrightarrow{\simeq} & H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{U}_s, R^j \lambda_* \mathbf{F}_\rho/\mathcal{K}|_{\mathfrak{U}_s}) \end{array}$$

montre alors que l'application $H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{X}_s, R^j \lambda_* \mathbf{F}_\rho) \rightarrow H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{U}_s, R^j \lambda_* \mathbf{F}_\rho|_{\mathfrak{U}_s})$ est d'image finie.

Passons maintenant au cas de la cohomologie étale à support compact. Soit $\mathcal{I}' \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ le faisceau d'idéaux définissant le sous-schéma fermé réduit $(\mathfrak{X}_s \setminus \mathfrak{U}_s^{\text{sat}})_{\text{red}} \subset \mathfrak{X}_s$. Dénotons $j' : \mathfrak{X}_s \setminus \overline{\mathfrak{U}}_s \rightarrow \mathfrak{X}_s$, $\mathcal{F}' = R^q \lambda_* \mathbf{F}_\rho$ et

$\mathcal{K}' = \ker(R^q \lambda_* \mathcal{F} \rightarrow j_* j'^* R^q \lambda_* \mathcal{F})$. Comme précédemment, on obtient

$$(3.6.2) \quad \mathcal{I}'^{\alpha_m} \cdot \mathrm{gr}_i^m \mathcal{F}' \subset \mathrm{gr}_i^m \mathcal{K}' \subset \ker(\gamma_{m,i}) \subset \mathrm{gr}_i^m \mathcal{F}'$$

pour $m \in \mathbf{N}^*$ et que les faisceaux $\ker(\gamma'_{m,i})/\mathcal{I}'^{\alpha_m} \cdot \mathrm{gr}_i^m \mathcal{F}'$ sont cohérents constructibles supportés sur

$$\overline{\mathfrak{X}_s \setminus \overline{\mathfrak{U}_s}} \Big|_{(\mathfrak{X}_s \setminus \overline{\mathfrak{U}_s})^{\mathrm{sat}}} = \overline{\mathfrak{U}_s} \setminus \mathfrak{U}_s^{\mathrm{sat}}.$$

Le faisceau \mathcal{K}' étant supporté sur $\mathfrak{X}_s \setminus (\mathfrak{X}_s \setminus \overline{\mathfrak{U}_s}) = \overline{\mathfrak{U}_s}$, les faisceaux cohérents $\mathcal{I}'^{\alpha_m} \cdot \mathrm{gr}_i^m \mathcal{F}'$ pour $m \in \mathbf{N}^*$ le sont aussi. Pour $m = 0$, on a $\mathrm{gr}_i^0 \mathcal{K}' \subset \mathrm{gr}_i^0 \mathcal{F}'$ pour $i \in \{0,1\}$, qui sont des faisceaux constructibles, donc les $\mathrm{gr}_i^0 \mathcal{K}'$ le sont aussi. Ainsi, \mathcal{K}' est une extension successive de faisceaux constructibles et faisceaux cohérents supportés sur $\overline{\mathfrak{U}_s}$, donc sa restriction $\mathcal{K}'|_{\overline{\mathfrak{U}_s}}$ est une extension successive de faisceaux constructibles et faisceaux cohérents. Comme $j_* j'^* \mathcal{F}'$ est supporté en dehors de \mathfrak{U}_s , on a $\mathcal{K}'|_{\mathfrak{U}_s} \xrightarrow{\cong} \mathcal{F}'|_{\mathfrak{U}_s}$, et on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_{\mathrm{ét},c}^i(\mathfrak{X}_s, R^j \lambda_* \mathbf{F}_\rho) & \longleftarrow & H_{\mathrm{ét},c}^i(\mathfrak{X}_s, \mathcal{K}') \\ \uparrow & & \uparrow \\ & & H_{\mathrm{ét}}^i(\overline{\mathfrak{U}_s}, \mathcal{K}'|_{\overline{\mathfrak{U}_s}}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H_{\mathrm{ét},c}^i(\mathfrak{U}_s, R^j \lambda_* \mathbf{F}_\rho|_{\mathfrak{U}_s}) & \xleftarrow{\cong} & H_{\mathrm{ét},c}^i(\mathfrak{U}_s, \mathcal{K}'|_{\mathfrak{U}_s}) \end{array}$$

qui montre que l'application $H_{\mathrm{ét},c}^i(\mathfrak{U}_s, R^j \lambda_* \mathbf{F}_\rho|_{\mathfrak{U}_s}) \rightarrow H_{\mathrm{ét},c}^i(\mathfrak{X}_s, R^j \lambda_* \mathbf{F}_\rho)$ est d'image finie. \square

3.7 - Remark. La même stratégie s'applique au cas où \mathfrak{X} est seulement supposé log-lisse sur \mathcal{O}_K . En effet, grâce à [41, Theorem 3.3] et [41, Lemma 3.2], on se réduit au cas où \mathfrak{X} est quasi-log-lisse sur \mathcal{O}_K au sens de [31, Definition 5.2]. Par comparaison formel-algébrique, on déduit de [31, Corollary 4.5, Theorem 5.4] une version formelle-rigide quasi-log-lisse de la filtration de Bloch-Kato-Hyodo, à partir de laquelle on conclut par les arguments qu'on vient de présenter.

3.8 - Proposition. *Soit*

$$U \subset X(\delta_1) \subset^\dagger X(\delta_2) \subset^\dagger \cdots \subset^\dagger X(\delta_r) \subset^\dagger X(\delta_{r+1}) = X$$

avec $0 < \delta_1 < \cdots < \delta_{r+1} = 1$ une chaîne d'ouverts admissibles quasi-compacts qui est la fibre générique d'une chaîne d'ouverts quasi-compacts d'un schéma formel séparé semi-stable sur \mathcal{O}_K

$$\mathfrak{U} \subset \mathfrak{U}_1 \subset \mathfrak{U}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{U}_r \subset \mathfrak{U}_{r+1} = \mathfrak{X}.$$

Supposons que $\zeta_\rho \in K$ et posons $l := \dim X + 2$. Alors pour $m \in \mathbf{N}$ et $t \in [1, r+1-l]$, les applications

$$H_{\mathrm{ét}}^m(X(\delta_{t+l}), \mathbf{F}_\rho) \rightarrow H_{\mathrm{ét}}^m(X(\delta_t), \mathbf{F}_\rho)$$

$$H_{\mathrm{ét},c}^m(X(\delta_t), \mathbf{F}_\rho) \rightarrow H_{\mathrm{ét},c}^m(X(\delta_{t+l}), \mathbf{F}_\rho)$$

sont d'image finie.

Démonstration. On a $R\Gamma_{\mathrm{ét}}(\mathfrak{Y}_s, R\lambda_* -) = R\Gamma_{\mathrm{ét}}(\mathfrak{Y}_\eta, -)$ pour tout schéma formel admissible \mathfrak{Y} sur \mathcal{O}_K par défini-

tion de $R\lambda_*$. Donc pour tout $t \in [1, r]$, on dispose des suites spectrales convergentes compatibles suivantes :

$$\begin{array}{ccc} E_2^{i,j} = H_{\text{ét}}^i((\mathcal{U}_{t+1})_s, R^j \lambda_* \mathbf{F}_\rho) & \Longrightarrow & H_{\text{ét}}^{i+j}(X(\delta_{t+1}), \mathbf{F}_\rho) \\ \downarrow & & \downarrow \\ E_2^{i,j} = H_{\text{ét}}^i((\mathcal{U}_t)_s, R^j \lambda_* \mathbf{F}_\rho) & \Longrightarrow & H_{\text{ét}}^{i+j}(X(\delta_t), \mathbf{F}_\rho) \end{array}$$

où $\lambda : X_{\text{ét}} \rightarrow \mathfrak{X}_{\text{ét}} \simeq (\mathfrak{X}_s)_{\text{ét}}$ est la projection de sites. Chacune des flèches verticales à gauche est d'image finie d'après (3.6). La page E_2 est concentrée en degrés $j \in [0, \dim X + 1] = [0, l - 1]$, donc il en est de même pour la page E_∞ . On en déduit par lemme 1.5 que pour $t \in [1, r+1-l]$, l'application $H_{\text{ét}}^m(X(\delta_{t+1}), \mathbf{F}_\rho) \rightarrow H_{\text{ét}}^m(X(\delta_t), \mathbf{F}_\rho)$ est d'image finie.

Quant à la cohomologie étale à support compact, pour tout schéma admissible \mathfrak{Y} sur \mathcal{O}_K et un choix de compactification $\iota : \mathfrak{Y} \rightarrow \overline{\mathfrak{Y}}$, on a des équivalences

$$R\Gamma_{\text{ét},c}(\mathfrak{Y}_s, R\lambda_* -) \simeq R\Gamma_{\text{ét}}(\overline{\mathfrak{Y}}_s, \iota_{s!} R\lambda_* -) \xrightarrow{\sim} R\Gamma_{\text{ét}}(\overline{\mathfrak{Y}}_s, R\lambda_* \iota_{\eta!} -) \simeq R\Gamma_{\text{ét}}(\overline{\mathfrak{Y}}_\eta, \iota_{\eta!} -) \simeq R\Gamma_{\text{ét},c}(\mathfrak{Y}_\eta, -)$$

où la deuxième est due à [20, Corollary 3.5.11 (ii)]. Donc pour tout $t \in [1, r]$, on dispose des suites spectrales convergentes compatibles suivantes

$$\begin{array}{ccc} E_2^{i,j} = H_{\text{ét},c}^i((\mathcal{U}_t)_s, R^j \lambda_* \mathbf{F}_\rho) & \Longrightarrow & H_{\text{ét},c}^{i+j}(X(\delta_t), \mathbf{F}_\rho) \\ \downarrow & & \downarrow \\ E_2^{i,j} = H_{\text{ét},c}^i((\mathcal{U}_{t+1})_s, R^j \lambda_* \mathbf{F}_\rho) & \Longrightarrow & H_{\text{ét},c}^{i+j}(X(\delta_{t+1}), \mathbf{F}_\rho) \end{array}$$

à partir desquelles on conclut comme précédemment. \square

4 Cas des courbes lisses

La preuve demandera quelques résultats sur les modèles semi-stables potentielles pour les courbes [5].

4.1. Algébrisation d'une inclusion stricte. Soit A l'algèbre de type fini plat sur \mathcal{O}_K obtenue précédemment par algébrisation. Supposons en plus que $U \subset X$ soit une inclusion stricte d'affinoïdes rigides, c'est-à-dire que $U = \text{Sp}(B)$ et que l'inclusion $U \subset X$ est induite par $\widehat{A}[\frac{1}{p}] \rightarrow B$ qui se factorise à travers $\widehat{A}[\frac{1}{p}] \rightarrow B^\dagger = \varinjlim_{r \rightarrow 1^+} B(r)$.

4.2. (Compactification lisse et modèles compatibles pour les courbes, variante de (5.1 ci-dessous)) Construisons une variété rigide projective lisse \overline{X} qui contient X comme un ouvert affinoïde admissible. Pour cela, commençons par algébriser X . Comme X est le spectre d'une algèbre de Tate sur K , il en existe un modèle formel admissible affine, nécessairement rig-lisse. On peut donc l'algébriser comme un schéma affine admissible $X^{\text{alg}} = \text{Spec } A$ sur \mathcal{O}_K dont la fibre générique $X_\eta^{\text{alg}} = \text{Spec } A_K$ est lisse sur K [37, Theorem 3.1.3].

Construisons maintenant une compactification \overline{X} qui sera lisse. Comme X_η^{alg} est une courbe algébrique affine lisse sur le corps parfait K , elle admet une unique compactifiée $\overline{X}_\eta^{\text{alg}}$ sur K : c'est l'unique courbe algébrique projective lisse sur K qui contient X_η^{alg} comme un ouvert dense. En rigidifiant, on obtient

$$X = ((X^{\text{alg}})_\rho^\wedge)_\eta \subset (X_\eta^{\text{alg}})^{\text{rig}} \subset \overline{X} := (\overline{X}_\eta^{\text{alg}})^{\text{rig}}$$

comme voulu (la première inclusion dépendant du modèle entier algébrique A ; voir par exemple [20, (0.7.6)]).

En prenant un modèle projectif admissible de $\overline{X}_\eta^{\text{alg}}$ sur \mathcal{O}_K et puis son complété p -adique, on obtient un modèle formel projectif admissible $\overline{\mathfrak{X}}$ de \overline{X} .

Soit $\{U_i\}_{i \in I}$ une famille finie d'ouverts admissibles quasi-compacts de X . On la complète en un recouvrement admissible de \overline{X} formé d'ouverts quasi-compacts et contenant $\{X\}$. D'après la théorie de Raynaud [4, §8.4, Lemma 5], ce recouvrement, quitte à faire un éclatement formel admissible à $\overline{\mathfrak{X}}$, provient d'un recouvrement ouvert contenant $\{\mathfrak{U}_i\}_{i \in I}$ de $\overline{\mathfrak{X}}$.

4.3 - Lemma (Modèles semi-stables compatibles). *Soit X un affinoïde rigide lisse sur K de dimension 1. Soit $\{U_i\}_{i \in I}$ une famille finie d'ouverts admissibles quasi-compacts de X . Alors il existe une extension finie K' de K telle que les immersions ouvertes $(U_i)_{K'} \rightarrow X_{K'}$ proviennent des immersions ouvertes de schémas formels semi-stables $\mathfrak{U}_i \rightarrow \mathfrak{X}$ sur $\mathcal{O}_{K'}$.*

Démonstration. Par (4.2), on obtient une compactification projective et lisse \overline{X} pour X , un modèle formel admissible projective $\overline{\mathfrak{X}}$ de \overline{X} , et un recouvrement ouvert fini de $\overline{\mathfrak{X}}$ contenant $\{\mathfrak{U}_i\}_{i \in I} \cup \{\mathfrak{X}\}$ qui induisent sur les fibres génériques $U_i \subset X \subset \overline{X}$. Ce recouvrement ouvert de $\overline{\mathfrak{X}}$ donne tout de suite un *recouvrement formel* [5, paragraphe avant Proposition 1.1] (fini) $\mathcal{V} = \{V_i\}_i$ de \overline{X} . Rappelons que pour tout recouvrement formel \mathcal{V} de \overline{X} , on peut lui associer l'unique modèle formel $\overline{X}_{\mathcal{V}}$ en recollant les $\mathrm{Spf} \mathcal{O}^\circ(V_i)$ pour $V_i \in \mathcal{V}$.

Dans la suite, on démontrera que tout recouvrement formel \mathcal{V} peut, potentiellement après une extension finie de corps de base, être raffiné à un recouvrement formel \mathcal{V}' tel que le modèle $\overline{X}_{\mathcal{V}'}$ associé soit semi-stable. Ce raffinement correspondra alors à un morphisme de schémas formels $\overline{X}_{\mathcal{V}'} \rightarrow \overline{X}_{\mathcal{V}}$ (éclatement formel). Et les images réciproques des $\mathfrak{U}_i \subset \mathfrak{X}$ fourniront les modèles semi-stables compatibles désirés (par abus de notation).

Il suffit de trouver un tel recouvrement pour $U_{\widehat{K}} \subset X_{\widehat{K}}$, puisqu'un tel recouvrement sera défini sur une extensions finie de K grâce à [5, Lemma 1.4].

On suit maintenant de près la preuve du théorème [5, Stable Reduction Theorem 7.1].

Rappelons quelques notations :

- On note désormais $C = \overline{X}_{\widehat{K}}$ la courbe projective et lisse.
- Soit \mathcal{V} un recouvrement formel de C , on note

$$\pi : C \rightarrow \widetilde{C}_{\mathcal{V}}$$

l'application de réduction.

- Pour tout $q \in \widetilde{C}_{\mathcal{V}}$, on note

$$C_+(q) := \pi^{-1}(q)$$

la fibre formel, qui se compactifie, en recollant des disques fermés le long de couronnes, en une courbe lisse et propre C^q [5, Definition 4.4] de genre $g(C^q)$. La notation dans *loc. cit.* est

$$C^q := C_+(q) \cup \coprod_{\mu, \nu} E_{\mu\nu}^q.$$

Par exemple, si q est un point lisse, alors $C_+(q)$ est isomorphe à un disque ouvert et se compactifie donc en recollant un disque fermé en \mathbf{P}^1 qui est de genre 1; si q est un point double, alors $C_+(q)$ est isomorphe à une couronne ouverte et se compactifie en recollant deux disques fermés en \mathbf{P}^1 - en fait, ces propriétés les caractérisent [5, Theorem 5.5]. Quant à la preuve du théorème, il s'agit alors de raffiner le recouvrement formel afin que les $C_+(q)$ soient parmi ces deux types.

- On note

$$\gamma(C, \mathcal{V}) := \max_{q \in \widetilde{C}_{\mathcal{V}}} \{g(C^q)\}.$$

Posons \mathcal{V}_0 le recouvrement de C obtenu par extension scalaire de celui du début de la preuve.

D'abord, quitte à raffiner \mathcal{V}_0 , on peut supposer que $\gamma(C, \mathcal{V}_0) = 0$. En effet, d'après [5, Proof of 7.3, Step 1], à partir d'un recouvrement formel arbitraire \mathcal{V} de C , on peut en construire un raffinement \mathcal{B} tel que

$\gamma(C, \mathcal{B}) < \gamma(C, \mathcal{V})$ dès que ce dernier est ≥ 1 (\mathcal{B} étant construit en subdivisant « l'adhérence de $C_+(q)$ » pour q tels que $g(C^q) = \gamma(C, \mathcal{V})$). Ensuite, pour tel \mathcal{V}_0 , on a [5, Theorem 5.5]

$$C_+(q) \simeq \mathbf{P}^1 \setminus \bigsqcup_{i \in I_q} D_i.$$

Rappelons que $\#I_q = 1$ si et seulement si q est un point lisse, $\#I_q = 2$ si et seulement si q est un point double. Suivant [5, Proof of 7.3, Step 2], quitte à subdiviser encore « l'adhérence de $C_+(q)$ » pour q singuliers, la cardinalité de tout I_q se rend ≤ 2 . Ainsi, tout point singulier q est un point double et le modèle $C_{\mathcal{V}_0}$ est semi-stable. \square

4.4 - Remark. Une preuve alternative repose sur les études soigneuses de la structure des courbes analytiques [12, Chapitre 5 et 6] (au sens de Berkovich). On peut toujours trouver un ensemble sommital S de X^{Berk} contenant les $\partial^{\text{an}}U_i$ et $\partial^{\text{an}}X$, le modèle semi-stable associé $\mathfrak{X} := (\overline{X}, \overline{\text{Alt}(S)})$ et ses ouverts $\mathfrak{U}_i := (U_i, \overline{\text{Alt}(S \cap U_i)})$ conviendraient [12, 6.3.19]. Cette preuve est du même esprit que celle de [5] mais dans le langage de Berkovich; en effet, l'ensemble sommital S correspond à un atlas affinoïde formel, qui n'est autre qu'un recouvrement formel pour Bosch et Lütkebohmert, le modèle formel auquel est \mathfrak{X} .

4.5 - Theorem. Soit $U \subset^\dagger X$ une inclusion ouverte stricte de courbes affinoïdes rigides lisses sur K . Alors pour tous $n, m \in \mathbf{N}$, l'application induite $H_{\text{ét}}^n(X, \mathbf{Z}/\mathfrak{p}^m) \rightarrow H_{\text{ét}}^n(U, \mathbf{Z}/\mathfrak{p}^m)$ est d'image finie.

need dimension 1

Démonstration. Fixons un $n \in \mathbf{N}$.

(i) Tout d'abord, par dévissage $0 \rightarrow \mathbf{Z}/\mathfrak{p}^{m-1} \xrightarrow{\mathfrak{p}} \mathbf{Z}/\mathfrak{p}^m \rightarrow \mathbf{Z}/\mathfrak{p} \rightarrow 0$, on se ramène au cas de \mathfrak{p} -torsion, autrement dit, il suffit de traiter le cas de $\mathbf{Z}/\mathfrak{p} \simeq \mathbf{F}_\mathfrak{p}$. En effet, fixons $m_0 \in \mathbf{N}$; par hypothèse de la stricte inclusion, on peut prolonger $U \subset X$ en une chaîne d'ouverts admissibles quasi-compacts

$$U \subset X(\delta_1) \subset X(\delta_2) \subset \cdots \subset X(\delta_{m_0}) \subset X(\delta_{m_0+1}) = X$$

avec $0 < \delta_1 < \cdots < \delta_{m_0+1} = 1$. Supposons que la proposition soit vraie pour $m = 1$. Alors pour tout $t \in [1, m]$, l'application $H_{\text{ét}}^n(X(\delta_{t+1}), \mathbf{F}_\mathfrak{p}) \rightarrow H_{\text{ét}}^n(X(\delta_t), \mathbf{F}_\mathfrak{p})$ est d'image finie. En appliquant le lemme 1.4 m fois aux suites exactes

$$\{H_{\text{ét}}^n(X(\delta_t), \mathbf{Z}/\mathfrak{p}^{m-1})\}_t \xrightarrow{\mathfrak{p}} \{H_{\text{ét}}^n(X(\delta_t), \mathbf{Z}/\mathfrak{p}^m)\}_t \rightarrow \{H_{\text{ét}}^n(X(\delta_t), \mathbf{F}_\mathfrak{p})\}_t, \quad m \in [1, m_0]$$

et par récurrence sur m , on obtient que pour $m \leq m_0$ et $t \in [1, m_0+1-m]$, l'application $H_{\text{ét}}^n(X(\delta_{t+m}), \mathbf{Z}/\mathfrak{p}^m) \rightarrow H_{\text{ét}}^n(X(\delta_t), \mathbf{Z}/\mathfrak{p}^m)$ est d'image finie, en particulier pour $t = 1, m = m_0$.

On traite désormais le cas $m = 1$.

(ii) Posons

$$r := (n+1)(\dim X + 2)$$

Par hypothèse de la stricte inclusion, on peut prolonger $U \subset X$ en une chaîne d'ouverts admissibles quasi-compacts

$$U \subset X(\delta_1) \subset X(\delta_2) \subset \cdots \subset X(\delta_r) \subset X(\delta_{r+1}) = X$$

avec $0 < \delta_1 < \cdots < \delta_{r+1} = 1$ (différente que précédemment). Par lemme 4.3 (comme on est en dimension 1), il existe une extension finie de corps K'/K telle que le changement de base vers K' de cette chaîne d'inclusions est induite par une chaîne d'ouverts quasi-compacts d'un schéma formel semi-stable sur $\mathcal{O}_{K'}$

$$\mathfrak{U} \subset \mathfrak{U}_1 \subset \mathfrak{U}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{U}_r \subset \mathfrak{U}_{r+1} = \mathfrak{X}.$$

Quitte à agrandir K' , on peut donc supposer $\zeta_\mathfrak{p} \in K'$ et que l'extension K'/K est galoisienne.

(iii) Il s'ensuit de la proposition 3.8 que pour $t \in [1, r+1-l]$, l'application $H_{\text{ét}}^m(X(\delta_{t+l})_{K'}, \mathbf{F}_\mathfrak{p}) \rightarrow H_{\text{ét}}^m(X(\delta_t)_{K'}, \mathbf{F}_\mathfrak{p})$ est d'image finie.

(iv) Il reste la descente galoisienne. On a les suites spectrales convergentes compatibles suivantes :

$$\begin{array}{ccc} E_2^{i,j} = H^i(G, H_{\text{ét}}^j(X(\delta_{t+l})_{K'}, \mathbf{F}_p)) & \Longrightarrow & H_{\text{ét}}^{i+j}(X(\delta_{t+l}), \mathbf{F}_p) \\ \downarrow & & \downarrow \\ E_2^{i,j} = H^i(G, H_{\text{ét}}^j(X(\delta_t)_{K'}, \mathbf{F}_p)) & \Longrightarrow & H_{\text{ét}}^{i+j}(X(\delta_t), \mathbf{F}_p) \end{array}$$

où $G = \text{Gal}(K'/K)$. Chacune des flèches verticales à gauche est d'image finie d'après ce qui précède et le fait que tout groupe de cohomologie $H^\bullet(G, -)$ d'un G -module fini est fini. On en déduit par lemme 1.6 que pour $t \in [1, r+1 - (n+1)L]$, l'application $H_{\text{ét}}^n(X(\delta_{t+(n+1)L}), \mathbf{F}_p) \rightarrow H_{\text{ét}}^n(X(\delta_t), \mathbf{F}_p)$ est d'image finie. \square

4.6 - Remark. Le nombre r dans la preuve dépend de n , mais on pourra aussi le rendre indépendant de n . Pour cela, on remarque que, dans la descente galoisienne, les suites spectrales sont concentrés en degrés $0 \leq j \leq (\dim X + 1) + (1 + \text{cd}_p G_{k'} + p - [k' : \mathbf{F}_p]) \leq l + c - 1$ par [3, Theorem 7.3] et [22, Theorem 4.1], où

$$c := 1 + 1 + p - [k : \mathbf{F}_p]$$

est une majoration de $1 + \text{cd}_p G_{k'} + p - [k' : \mathbf{F}_p]$ pour toute extension finie k'/k (si l'on utilise [20, Corollary 2.8.3] au lieu de la première référence, on obtiendra $2 \dim X$ à la place de $\dim X + 1$). Ainsi, les filtrations spectrales sur l'aboutissement sont de longueur au plus $l + c$. Donc $l + c$ fois (au lieu de $n + 1$ fois) l'application récursive du lemme 1.4 implique que, pour tout $n \in \mathbf{N}$ et $t \in [1, r+1 - (l+c)L]$, l'application $H_{\text{ét}}^n(X(\delta_{t+(l+c)L}), \mathbf{F}_p) \rightarrow H_{\text{ét}}^n(X(\delta_t), \mathbf{F}_p)$ est d'image finie. On aurait pu poser $r = (l+c)L$.

5 Cas des courbes générales

Existence de modèles formels d'une immersion ouverte

5.1. (Compactification et modèles compatibles) Comme X est le spectre d'une algèbre de Tate sur K , il en existe un modèle formel admissible affine. D'après [37, Theorem 3.1.3], ce modèle formel est le complété p -adique d'un schéma affine $X^{\text{alg}} = \text{Spec } A$ admissible sur \mathcal{O}_K . De plus, il existe une immersion ouverte de X^{alg} dans un schéma $\overline{X^{\text{alg}}}$ admissible et projectif sur \mathcal{O}_K ; en effet, on peut le plonger dans un espace projectif sur \mathcal{O}_K , puis y prendre l'adhérence schématique de X^{alg} . Le schéma $\overline{X^{\text{alg}}}$ est en particulier séparé. Par complétion p -adique, on obtient une immersion ouverte quasi-compacte de schémas formels admissibles sur \mathcal{O}_K

$$\mathfrak{X} := (X^{\text{alg}})_p^\wedge \subset \overline{\mathfrak{X}} := (\overline{X^{\text{alg}}})_p^\wedge.$$

En prenant la fibre générique rigide, on réalise X comme un ouvert affinoïde admissible dans l'espace rigide projectif sur K

$$X \subset \overline{X} := (\overline{\mathfrak{X}})_\eta.$$

Soit $\{U_i\}_{i \in I}$ une famille finie d'ouverts admissibles quasi-compacts de X . On la complète en un recouvrement admissible de \overline{X} formé d'ouverts quasi-compacts et contenant $\{X\}$. D'après la théorie de Raynaud [4, §8.4, Lemma 5], ce recouvrement, quitte à faire un éclatement formel admissible à $\overline{\mathfrak{X}}$, provient d'un recouvrement ouvert contenant $\{\mathfrak{U}_i\}_{i \in I}$ de $\overline{\mathfrak{X}}$.

5.2 - Lemma (Algébrisation d'éclatements formels admissibles). *L'éclaté formel admissible d'un schéma formel admissible de la forme $\mathfrak{X} = (X^{\text{alg}})_p^\wedge$ (où X^{alg} est un schéma algébrique localement de type fini et plat sur \mathcal{O}_K) relativement à un idéal (ouvert) $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ est défini algébriquement.*

Démonstration. Il suffit de montrer qu'il existe un idéal $\mathcal{I}^{\text{alg}} \subset \mathcal{O}_{X^{\text{alg}}}$ tel que $\mathcal{I} = \mathcal{I}^{\text{alg}} \cdot \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$. Pour cela, on peut définir \mathcal{I}^{alg} comme l'image réciproque de \mathcal{I} par le morphisme $\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X/p^n \mathcal{O}_X \xrightarrow{\cong} i_*(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/p^n \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ pour

certain n tel que $p^n \mathcal{O}_X \subset \mathcal{I}$ (qui existe localement), ou $\mathcal{I} := \ker(\mathcal{O}_X \rightarrow i_*(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathcal{I}))$, où i est le morphisme $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ d'espaces topologiquement annelés. En effet, on vérifie localement que le complété formel de \mathcal{I}^{alg} est \mathcal{I} . \square

Ainsi, l'éclatement formel admissible de \mathfrak{X} provient d'un éclatement algébrique admissible de X^{alg} .

Hyperrecouvrement par des semi-stables

5.3. Travaillons avec les catégories suivantes :

- La catégorie $\mathbf{Sch}_{\mathcal{O}_K}^{\text{adm}}$ des schémas admissibles (i.e. plats et de présentation fini) séparé sur $\text{Spec}(\mathcal{O}_K)$,
- La catégorie $\mathbf{FSch}_{\mathcal{O}_K}^{\text{adm}}$ des schémas formels admissibles (i.e. plats et de présentation fini) sur $\text{Spf}(\mathcal{O}_K)$,
- La catégorie \mathbf{Rig}_K des espaces rigides sur K .

Dans chacune d'entre elles, le produit fini et le produit fibré existent (les objets finals étant respectivement $\text{Spec}(\mathcal{O}_K)$, $\text{Spf}(\mathcal{O}_K)$ et $\text{Sp}(K)$), donc toutes les limites finies existent. Plus précisément, le produit fibré dans $\mathbf{Sch}^{\text{adm}}$ est localement donné par $(A \otimes_C B)/(A \otimes_C B)[\pi^\infty]$, celui dans $\mathbf{FSch}_{\mathcal{O}_K}^{\text{adm}}$ donné par $(A \hat{\otimes}_C B)/(A \hat{\otimes}_C B)[\pi^\infty]$, celui dans \mathbf{Rig}_K donné par $A \hat{\otimes}_C B$ des espaces de Banach p -adiques. En plus, les sommes finies y existent aussi, sont disjointes et universelles⁸.

On considère les foncteurs

$$\mathbf{Sch}_{\mathcal{O}_K}^{\text{adm}} \xrightarrow{(-)^\wedge_p} \mathbf{FSch}_{\mathcal{O}_K}^{\text{adm}} \xrightarrow{(-)_\eta} \mathbf{Rig}_K.$$

5.4 - **Lemma.** *Les foncteurs $(-)^\wedge_p$ et $(-)_\eta$ ci-dessus commutent aux limites finies.*

Démonstration. Ceci revient au même de dire qu'ils commutent aux produits fibrés et aux produits finis. On le vérifie par exemple pour $(-)^\wedge_p : \mathbf{Sch}_{\mathcal{O}_K}^{\text{adm}} \rightarrow \mathbf{FSch}_{\mathcal{O}_K}^{\text{adm}}$ et $(-)_\eta : \mathbf{FSch}_{\mathcal{O}_K}^{\text{adm}} \rightarrow \mathbf{Rig}_K$, ce qui est moins clair. Tout d'abord, notons que le foncteur $(-)^\wedge_p$ est localement donné par l'association $\text{Spec}(A) \mapsto \text{Spf}(\hat{A})$, et le foncteur $(-)_\eta$ donné par $\text{Spf}(A) \mapsto \text{Sp}(A[\frac{1}{p}])$. Vérifions qu'ils commutent au produit fibré.

Pour le second, on a

$$\begin{aligned} \text{Spf}(A)_\eta \times_{\text{Spf}(C)_\eta} \text{Spf}(B)_\eta &= \text{Sp}(A[\frac{1}{p}]) \times_{\text{Sp}(C[\frac{1}{p}])} \text{Sp}(B[\frac{1}{p}]) \\ &= \text{Sp}(A[\frac{1}{p}] \hat{\otimes}_{C[\frac{1}{p}]} B[\frac{1}{p}]) \\ &= \text{Sp}(A \otimes_C B[\frac{1}{p}]) \\ &= \text{Spf}(A \hat{\otimes}_C B)_\eta. \end{aligned}$$

Pour le premier, on aura besoin du lemme suivant.

5.4.1 - **Lemma.** *Soient R un anneau et $f \in R$. Soit M un R -module de complété $\widehat{M} := \varprojlim_n M/f^n M$. Alors on a un complexe*

$$0 \rightarrow \widehat{M}[f^\infty] \rightarrow \widehat{M} \rightarrow \widehat{M/\widehat{M}[f^\infty]} \rightarrow 0.$$

Il est exact à gauche et à droite. Il est exact au milieu si de plus M de f^∞ -torsion bornée, i.e. si $M[f^\infty] = M[f^N]$ pour certain $N \in \mathbf{N}$.

En particulier, si R est un anneau noethérien et M est un R -module de type fini, la suite est exacte.

Démonstration. On a $(M/\widehat{M}[f^\infty])[f^\infty] = 0$, d'où la suite courte est un complexe. Si $M[f^\infty] = M[f^N]$, pour tout élément $(\overline{x_n})_n$ dans le noyau de la flèche droite, on a $x_n \in f^n M + M[f^N]$, d'où $f^N x_n \in f^n M$, donc $(\overline{x_n})_n \in \widehat{M}[f^N]$. \square

8. Terminologie de [1, Chapitre V bis].

Grâce à ceci, on obtient

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Spec}(A) \times_{\mathrm{Spec}(C)} \mathrm{Spec}(B))_{\hat{p}}^{\wedge} &= \mathrm{Spec}((A \otimes_C B)/(A \otimes_C B)[\hat{p}^{\infty}])_{\hat{p}}^{\wedge} \\
&= \mathrm{Spf}\left(\overline{A \otimes_C B}/\overline{(A \otimes_C B)[\hat{p}^{\infty}]}\right) \\
&= \mathrm{Spf}\left(\overline{A \otimes_C B}/(A \otimes_C B)[\hat{p}^{\infty}]\right) \\
&= \mathrm{Spf}\left(\widehat{A \otimes_C B}/(\widehat{A \otimes_C B})[\hat{p}^{\infty}]\right) \\
&= \mathrm{Spf}(\widehat{A}) \times_{\mathrm{Spf}(\widehat{C})} \mathrm{Spf}(\widehat{B}),
\end{aligned}$$

où la troisième identité découle du lemme précédent. \square

5.5 - Corollary. *Les foncteurs ci-dessus commutent aux foncteurs cosquelette $\mathrm{cosq}_n : \mathrm{Simp}_n \rightarrow \mathrm{Simp}$.*

Démonstration. Ceci découle aussitôt du lemme 5.4 grâce à l'expression [36, Lemma 0183] des foncteurs cosquelette comme limites finies

$$(\mathrm{cosq}_n X_{\bullet \leq n})_{[m]} = \lim_{(\Delta/[m])_{\leq n}^{\mathrm{op}}} X_{\bullet \leq n}$$

pour $m \geq n$, où la limite est prise dans la catégorie des flèches de but $X_{[-1]}$. \square

5.6 - Corollary. *Soit $(Y_i)_{i \in I}$ un diagramme fini d'objets dans $\mathrm{Sch}_{\mathcal{O}_K}^{\mathrm{adm}}$. Si $X \rightarrow \lim_{i \in I} Y_i$ est un morphisme propre et surjectif d'objet dans $\mathrm{Sch}_{\mathcal{O}_K}^{\mathrm{adm}}$, alors le morphisme induit $(X_{\hat{p}}^{\wedge})_{\eta} \rightarrow \lim_{i \in I} ((Y_i)_{\hat{p}}^{\wedge})_{\eta}$ est aussi propre et surjectif.*

Démonstration. Le composé

$$(X_{\hat{p}}^{\wedge})_{\eta} \rightarrow \lim_{i \in I} ((Y_i)_{\hat{p}}^{\wedge})_{\eta} \stackrel{(5.4)}{\simeq} \left(\lim_{i \in I} Y_i \right)_{\hat{p}}^{\wedge}_{\eta}$$

est la fibre générique rigide du morphisme propre et surjectif $X \rightarrow \lim_{i \in I} Y_i$. Il est donc propre et surjectif par [20, Proposition 1.9.6, Lemma 3.7.3]. \square

Pour clarté, on rappelle le théorème sur l'existence d'un modèle semi-stable potentiel (à un log-éclatement près) pour tout log-schéma log-lisse de type fini sur un anneau de valuation discrète.

5.7 - Theorem (Saito, cf. [32, Theorem 1.8/Theorem 2.9 (1)]). *Soit X un log-schéma log-lisse et de type fini sur un anneau de valuation discrète \mathcal{O}_K , il existe un entier $e \geq 1$ tel que, pour toute L extension finie séparable sur K d'indice de ramification divisible par e , il existe un log-éclatement (en particulier un morphisme projectif et log-étale) $f : W \rightarrow X \otimes_{\mathcal{O}_K}^{\mathrm{log}} \mathcal{O}_L$ tel que $U_W := f^{-1}(U_{X,L}) \rightarrow U_{X,L} = U_X \otimes_K L$ est un isomorphisme et que (W, U_W) est semi-stable sur \mathcal{O}_L , où $U_X := X_{\mathrm{triv}}$ et $X \otimes_{\mathcal{O}_K}^{\mathrm{log}} \mathcal{O}_L$ est le log-schéma saturé de $X \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_L$.*

5.8 - Corollary. *Pour tout schéma X de type fini séparé et plat sur \mathcal{O}_K , il existe une extension finie séparable L de K un morphisme projectif et surjectif $W \rightarrow X$ avec W semi-stable sur \mathcal{O}_L .*

Démonstration. D'après [38, Theorem 1.2.9/Theorem 4.3.1 (ii)], il existe une extension finie K' de K de degré une puissance de p et une altération projective (comme X est supposé séparé) $b : X' \rightarrow X$ de degré une puissance de p telles que W avec la log-structure définie par sa fibre spéciale est un log-schéma log-lisse sur $\mathcal{O}_{K'}$.

Ensuite, le théorème précédent fournit une extension L de K' et un morphisme projectif et surjectif $W \rightarrow X'$ avec W semi-stable sur \mathcal{O}_L . En effet, soit $f : W \rightarrow X' \otimes_{\mathcal{O}_K}^{\mathrm{log}} \mathcal{O}_L$ le log-éclatement fourni par le théorème, qui est en particulier projectif. De plus, f est surjectif puisqu'il est fermé et que son image contient U_X qui est dense dans X (car X est un log-schéma log-régulier localement noethérien; voir [30, Proposition 2.6]). Par ailleurs, étant la saturation d'un log-schéma fin, le morphisme de schémas sous-jacents $\varphi : X' \otimes_{\mathcal{O}_K}^{\mathrm{log}} \mathcal{O}_L \rightarrow X'$ est fini surjectif. La modification désirée est alors le composé $f \circ \varphi : W \rightarrow X'$. \square

5.9 - Proposition (Construction d'hyperrecouvrement d'un espace rigide venant d'un modèle algébrique). *Soit X^{alg} un schéma de type fini séparé et plat sur \mathcal{O}_K . Il existe $\{K_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ une suite d'extensions finies de K contenant ζ_p et un objet simplicial $X_{\bullet}^{\mathrm{alg}}$ de $\mathrm{Sch}_{\mathcal{O}_K}^{\mathrm{adm}}$ augmenté sur X^{alg} tel que*

- (i) pour tout $n \in \mathbf{N}$, le schéma $X_{[n]}^{\text{alg}}$ est localement semi-stable sur \mathcal{O}_{K_t} pour certain $t \in [0, n]$, avec t dépendant de la composante connexe de $X_{[n]}^{\text{alg}}$;
(ii) pour tout $t \geq -1$, le morphisme

$$(5.9.1) \quad X_{[t+1]}^{\text{alg}} \rightarrow (\text{cosq}_t X_{\bullet \leq t}^{\text{alg}})_{t+1}$$

est projectif et surjectif.

Démonstration. Suivons le procédé inductif décrite dans [9, 6.2.5] pour sa construction.

Définissons d'abord

$$X_{[-1]}^{\text{alg}} := X^{\text{alg}}.$$

Pour le prochain niveau : il existe un morphisme projectif et surjectif $W \rightarrow X^{\text{alg}}$ avec W semi-stable sur \mathcal{O}_{K_0} pour une extension fini K_0 de K . On peut supposer que $\zeta_\rho \in K_0$. Posons alors

$$X_{[0]}^{\text{alg}} := W.$$

avec la flèche $W \rightarrow X^{\text{alg}}$ comme ci-dessus. On obtient ainsi un objet simplicial 0-tronqué σ -scindé de $\mathbf{Sch}_{\mathcal{O}_K}^{\text{adm}}$ augmenté

$$X_{[0]}^{\text{alg}} \rightarrow X_{[-1]}^{\text{alg}}.$$

Supposons qu'on ait construit $X_{\bullet \leq n}^{\text{alg}}$ un objet simplicial n -tronqué σ -scindé de $\mathbf{Sch}_{\mathcal{O}_K}^{\text{adm}}$ augmenté sur X^{alg} tel que $X_{[t]}^{\text{alg}}$ pour tout $t \in [0, n]$ est semi-stable sur \mathcal{O}_{K_t} et $t' \in [0, t]$, et que pour tout $t \in [-1, n-1]$, le morphisme (5.9.1) est projectif et surjectif. Formons

$$W := (\text{cosq}_n X_{\bullet \leq n}^{\text{alg}})_{n+1},$$

qui est encore séparé car le produit fibré et le produit, donc ainsi que les limites finies dans $\mathbf{Sch}_{\mathcal{O}_K}^{\text{adm}}$, préservent la séparabilité. Il existe alors par (5.8) un morphisme projectif et surjectif $W' \rightarrow W$ avec W' semi-stable sur $\mathcal{O}_{K_{n+1}}$ pour une extension finie K_{n+1} de K_0 . On peut supposer que $\zeta_\rho \in K_{n+1}$. D'après [1, Chapitre V bis, Proposition 5.1.3], il existe $X_{\bullet \leq n+1}^{\text{alg}}$ un objet simplicial $(n+1)$ -tronqué σ -scindé de $\mathbf{Sch}_{\mathcal{O}_K}^{\text{adm}}$ étendant $X_{\bullet \leq n}^{\text{alg}}$ tel que $NX_{[n+1]}^{\text{alg}} \simeq W'$ ⁹. En particulier, $X_{[n+1]}^{\text{alg}}$ est la réunion disjointe de W' et d'autres schémas dont chacun est semi-stable sur l'extension finie K_t de K contenant ζ_ρ pour certain $t \in [0, n]$. Le morphisme (5.9.1) pour $t = n$ est alors projectif et surjectif.

Par récurrence, on obtient un objet simplicial $X_{\bullet}^{\text{alg}} \in \text{Simp}(\mathbf{Sch}_{\mathcal{O}_K}^{\text{adm}})$ vérifiant la condition (i) et (ii) dans l'énoncé. \square

5.10 - Corollary. Soient X^{alg} un schéma de type fini séparé et plat sur \mathcal{O}_K et X_{\bullet}^{alg} vérifiant la conclusion de la proposition 5.9. Alors la fibre générique rigide X_{\bullet} de X_{\bullet}^{alg} forme un hyperrecouvrement de X qui est la fibre générique rigide de X^{alg} pour la v -topologie.

En plus, pour tout $n \in \mathbf{N}$, le morphisme $X_{[n]} \rightarrow X$ est projective.

Démonstration. En prenant la fibre générique rigide, on obtient un objet simplicial X_{\bullet} de \mathbf{Rig}_K augmenté sur X . C'est un hyperrecouvrement pour la v -topologie si et seulement si pour tout $t \geq -1$, le morphisme

$$(5.10.1) \quad X_{[t+1]} \rightarrow (\text{cosq}_t X_{\bullet \leq t})_{t+1}$$

est un recouvrement pour la v -topologie [21, Définition 3.5.4]¹⁰. Ceci est vrai car il est propre et surjectif par

9. Voir [1, Chapitre V bis, Définition 5.1.1] pour la notion d'être σ -scindé et la notation N .

[20, Proposition 1.9.6, Lemma 3.7.3].

La dernière phrase de l'énoncé concernant le morphisme $X_{[n]} \rightarrow X$ s'ensuit des faits que la projectivité est stable par produits fibrés et que toute section d'un morphisme projectif est encore projectif; voir la démonstration de [7, Corollary 4.14]. \square

Hyperdescente

5.11. (Hyperdescente) Soient \mathcal{S} un site et \mathcal{C} une ∞ -catégorie présentable. On dit qu'un préfaisceau \mathcal{F} sur \mathcal{S} à valeurs dans \mathcal{C} vérifie la descente (*resp.* l'hyperdescente), ou que \mathcal{F} est un faisceau (*resp.* hyperfaisceau), si pour tout hyperrecouvrement de Čech (*resp.* tout hyperrecouvrement) $U_\bullet \rightarrow U$ dans \mathcal{S} , la flèche naturelle

$$\mathcal{F}(U) \rightarrow \lim_{\Delta} \mathcal{F}(U_\bullet)$$

est une équivalence. Dénotons $\mathbf{Sh}(\mathcal{S}, \mathcal{C})$ (*resp.* $\mathbf{Sh}^{\text{hyp}}(\mathcal{S}, \mathcal{C})$) la ∞ -catégorie des faisceaux (*resp.* sa sous-catégorie pleine des hyperfaisceaux) sur \mathcal{S} à valeurs dans \mathcal{C} . Par exemple, pour tout faisceau $\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}(\mathcal{S}, \mathcal{C})$, le préfaisceau $U \mapsto R\Gamma(U, \mathcal{F}|_U)$ est un hyperfaisceau [25, Lemma 6.5.2.9]¹¹.

En particulier, pour tout diamant Y (par exemple pour $Y = X^\diamond$ avec $X \in \mathbf{Rig}_K$ [34, Lemma 15.6]) et pour tout faisceau de groupes abéliens \mathcal{F} sur $Y_{\text{ét}}$, le préfaisceau $R\Gamma((-)_v, \nu_Y^* \mathcal{F})$ vérifie la v -hyperdescente pour les diamants, où l'on dénote par ν_Y le morphisme de sites $Y_v \rightarrow Y_{\text{ét}}$. En effet, soit Y_\bullet un hyperrecouvrement de Y par des diamants dans Y_v ; on a $R\Gamma(Y_{\bullet, \text{ét}}, \pi_\bullet^* \mathcal{F}) \simeq R\Gamma(Y_{\bullet, v}, \nu_{Y_\bullet}^* \pi_\bullet^* \mathcal{F}) \simeq R\Gamma(Y_{\bullet, v}, \pi_\bullet^* \nu_Y^* \mathcal{F})$ selon [34, Section 14]. En plus, on sait que $R\Gamma((-)_v, \nu_Y^* \mathcal{F})$ vérifie la v -hyperdescente d'après ce qui précède, car $\nu_Y^* \mathcal{F}$ est un faisceau sur Y_v .

5.12 - Proposition. Soit X un espace rigide sur K avec un hyperrecouvrement X_\bullet par des espaces rigides sur K . Supposons qu'il existe une immersion ouverte $X \subset \bar{X}$ avec \bar{X} un espace rigide propre sur K , et que X_\bullet provient par restriction d'un hyperrecouvrement \bar{X}_\bullet de \bar{X} tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le morphisme $\bar{\pi}_n : \bar{X}_{[n]} \rightarrow \bar{X}$ soit propre. Alors pour tout faisceau de groupes abéliens \mathcal{F} sur $X_{\text{ét}}$, la flèche naturelle

$$R\Gamma_{\text{ét}, c}(X, \mathcal{F}) \rightarrow R\lim_{\Delta} R\Gamma_{\text{ét}, c}(X_\bullet, \pi_\bullet^* \mathcal{F})$$

est une équivalence.

Démonstration. Les morphismes propres π_n induisent des morphismes compatibles

$$R\Gamma_{\text{ét}, c}(X, \mathcal{F}) \rightarrow R\Gamma_{\text{ét}, c}(X, \pi_{n*} \pi_n^* \mathcal{F}) \simeq R\Gamma_{\text{ét}, c}(X, \pi_{n!} \pi_n^* \mathcal{F}) \simeq R\Gamma_{\text{ét}, c}(X_{[n]}, \pi_n^* \mathcal{F}),$$

fournissant ainsi la flèche naturelle dans l'énoncé. Par ailleurs, les composés

$$R\Gamma_{\text{ét}, c}(X, \mathcal{F}) \simeq R\Gamma_{\text{ét}}(\bar{X}, j_! \mathcal{F}) \rightarrow R\Gamma_{\text{ét}}(\bar{X}, \bar{\pi}_{n*} \bar{\pi}_n^* j_! \mathcal{F}) \simeq R\Gamma_{\text{ét}}(\bar{X}, \bar{\pi}_{n*} j_{n!} \pi_n^* \mathcal{F}) \simeq R\Gamma_{\text{ét}}(\bar{X}_{[n]}, j_{n!} \pi_n^* \mathcal{F})$$

10. Si on préfère la définition de la v -topologie pour les diamants [34], on obtiendra la même v -descente au final, puisque l'on a des homéomorphismes $|X_{[l]}| \simeq |X_{[l]}^\diamond|$ et des équivalences de sites $(X_{[l]})_{\text{ét}} \simeq (X_{[l]}^\diamond)_{\text{ét}}$ par [34, Lemma 15.6], et que le foncteur $\text{diam}(-)^\diamond : \mathbf{Rig}_K \rightarrow \mathbf{Diam}$ commute au produit fibré par définition.

11. La notion d'hypercomplétude est définie juste avant le lemme cité, et il s'avère [25, Theorem 6.5.3.12] qu'il s'agit aussi de la descente par rapport aux hyperrecouvrements.

définissent les mêmes morphismes (à une homotopie près)¹².

Pour montrer l'équivalence, dénotons par $j : X \rightarrow \overline{X}$ l'immersion ouverte dans l'énoncé et par j_n son changement de base vers le niveau $[n] \in \Delta$. On a

$$\begin{aligned} R\Gamma_{\text{ét},c}(X, \mathcal{F}) &\simeq R\Gamma_{\text{ét}}(\overline{X}, j_! \mathcal{F}) \\ &\simeq R \lim_{[n] \in \Delta} R\Gamma_{\text{ét}}(\overline{X}_{[n]}, \overline{\pi}_n^* j_! \mathcal{F}) \\ &\simeq R \lim_{[n] \in \Delta} R\Gamma_{\text{ét}}(\overline{X}_{[n]}, j_n! \pi_n^* \mathcal{F}) \\ &\simeq R \lim_{[n] \in \Delta} R\Gamma_{\text{ét},c}(X_{[n]}, \pi_n^* \mathcal{F}) \end{aligned}$$

où le deuxième isomorphisme vient de la v -hyperdescente (5.11) pour la cohomologie étale. \square

Démontrons maintenant le théorème principal.

5.13 - Theorem. *Soit $U \subset^\dagger X$ une inclusion ouverte stricte de courbes affinoïdes rigides sur K . Alors pour tous $n, m \in \mathbf{N}$, les applications induites $H_{\text{ét}}^n(X, \mathbf{Z}/\mathfrak{p}^m) \rightarrow H_{\text{ét}}^n(U, \mathbf{Z}/\mathfrak{p}^m)$ et $H_{\text{ét},c}^n(U, \mathbf{Z}/\mathfrak{p}^m) \rightarrow H_{\text{ét},c}^n(X, \mathbf{Z}/\mathfrak{p}^m)$ sont d'image finie.*

Démonstration. Fixons un $n \in \mathbf{N}$.

(i) On se réduit au cas $m = 1$ comme dans la partie (i) de la preuve du théorème 4.5. Supposons désormais que $m = 1$.

(ii) Posons

$$r := (n + 1)(\dim X + 2)$$

Par hypothèse de la stricte inclusion, on peut prolonger $U \subset X$ en une chaîne d'ouverts admissibles quasi-compacts

$$(5.13.1) \quad U \subset X(\delta_1) \subset^\dagger X(\delta_2) \subset^\dagger \cdots \subset^\dagger X(\delta_r) \subset^\dagger X(\delta_{r+1}) = X$$

avec $0 < \delta_1 < \cdots < \delta_{r+1} = 1$. Par (5.1), il existe un schéma algébrique X^{alg} de type fini et plat sur \mathcal{O}_K modélisant X et tel que cette chaîne d'inclusions est induite par une chaîne d'ouverts quasi-compacts d'un schéma formel admissible projectif sur \mathcal{O}_K

$$\mathfrak{U} \subset \mathfrak{U}_1 \subset \mathfrak{U}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{U}_r \subset \mathfrak{U}_{r+1} = \mathfrak{X} \subset \overline{\mathfrak{X}} = \left(\overline{X^{\text{alg}}} \right)_\mathfrak{p}^\wedge.$$

Soit $\overline{X^{\text{alg}}}_\bullet$ un objet simplicial de $\mathbf{Sch}_{\mathcal{O}_K}^{\text{adm}}$ augmenté sur $\overline{X^{\text{alg}}}$ donné par la proposition 5.9. Ensuite, posons

$$\overline{\mathfrak{X}}_\bullet := \left(\overline{X^{\text{alg}}}_\bullet \right)_\mathfrak{p}^\wedge.$$

L'objet simplicial

$$\overline{X}_\bullet := (\overline{\mathfrak{X}}_\bullet)_\eta$$

est un hyperrecouvrement de \overline{X} dans \mathbf{Rig}_K pour la v -topologie (5.10). Par changement de base, on obtient des

12. En effet, il suffit de remarquer le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc} R\Gamma_{\text{ét},c}(X, \mathcal{F}) & \longrightarrow & R\Gamma_{\text{ét},c}(X, \pi_{n*} \pi_n^* \mathcal{F}) & \simeq & R\Gamma_{\text{ét},c}(X, \pi_n! \pi_n^* \mathcal{F}) & \simeq & R\Gamma_{\text{ét},c}(X_{[n]}, \pi_n^* \mathcal{F}) \\ \downarrow \scriptstyle \mathbb{R} & & \downarrow \scriptstyle \mathbb{R} & & \downarrow \scriptstyle \mathbb{R} & & \downarrow \scriptstyle \mathbb{R} \\ R\Gamma_{\text{ét}}(\overline{X}, j_! \mathcal{F}) & \longrightarrow & R\Gamma_{\text{ét}}(\overline{X}, j_n! \pi_n^* \mathcal{F}) & \simeq & R\Gamma_{\text{ét}}(\overline{X}, j_n! \pi_n! \pi_n^* \mathcal{F}) & \simeq & R\Gamma_{\text{ét}}(\overline{X}_{[n]}, j_n! \pi_n^* \mathcal{F}) \\ & \searrow & \downarrow \scriptstyle \mathbb{R} & & \downarrow \scriptstyle \mathbb{R} & & \downarrow \scriptstyle \mathbb{R} \\ & & R\Gamma_{\text{ét}}(\overline{X}, \overline{\pi}_{n*} \overline{\pi}_n^* j_n! \mathcal{F}) & \simeq & R\Gamma_{\text{ét}}(\overline{X}, \overline{\pi}_{n*} j_n! \pi_n^* \mathcal{F}) & \simeq & R\Gamma_{\text{ét}}(\overline{X}_{[n]}, j_n! \pi_n^* \mathcal{F}). \end{array}$$

morphismes simpliciaux

$$\mathfrak{U}_\bullet \subset (\mathfrak{U}_1)_\bullet \subset (\mathfrak{U}_2)_\bullet \subset \cdots \subset (\mathfrak{U}_r)_\bullet \subset (\mathfrak{U}_{r+1})_\bullet = \mathfrak{X}_\bullet \subset \overline{\mathfrak{X}}_\bullet$$

induisant aux fibres génériques (la stricte inclusion étant préservée par le changement de base propre [20, Lemma 1.10.17 (iii), (iv)])

$$U_\bullet \subset (U_1)_\bullet \subset^\dagger (U_2)_\bullet \subset^\dagger \cdots \subset^\dagger (U_r)_\bullet \subset^\dagger (U_r)_\bullet = X_\bullet \subset \overline{X}_\bullet$$

qui sont respectivement des hyperrecouvrements de (5.13.1). D'après la v -hyperdescente (5.11) resp. (5.12), on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & R\Gamma_{\text{ét}}(U_{t+1}, \mathbf{F}_p) & \longrightarrow & R\Gamma_{\text{ét}}(U_t, \mathbf{F}_p) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \\ \cdots & \longrightarrow & R\lim_{\Delta} R\Gamma_{\text{ét}}((U_{t+1})_\bullet, \mathbf{F}_p) & \longrightarrow & R\lim_{\Delta} R\Gamma_{\text{ét}}((U_t)_\bullet, \mathbf{F}_p) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

resp.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & R\Gamma_{\text{ét},c}(U_t, \mathbf{F}_p) & \longrightarrow & R\Gamma_{\text{ét},c}(U_{t+1}, \mathbf{F}_p) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \\ \cdots & \longrightarrow & R\lim_{\Delta} R\Gamma_{\text{ét},c}((U_t)_\bullet, \mathbf{F}_p) & \longrightarrow & R\lim_{\Delta} R\Gamma_{\text{ét},c}((U_{t+1})_\bullet, \mathbf{F}_p) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

où la seconde ligne est la limite simpliciale du morphisme

$$\cdots \rightarrow R\Gamma_{\text{ét}}((U_{t+1})_\bullet, \mathbf{F}_p) \rightarrow R\Gamma_{\text{ét}}((U_t)_\bullet, \mathbf{F}_p) \rightarrow \cdots$$

resp.

$$\cdots \rightarrow R\Gamma_{\text{ét},c}((U_t)_\bullet, \mathbf{F}_p) \rightarrow R\Gamma_{\text{ét},c}((U_{t+1})_\bullet, \mathbf{F}_p) \rightarrow \cdots$$

(iii) En chaque niveau $[n] \in \Delta$, pour tous $m \in \mathbf{N}$ et $t \in [1, r+1-l]$, l'application

$$H_{\text{ét}}^m((U_{t+1})_{[n]}, \mathbf{F}_p) \rightarrow H_{\text{ét}}^m((U_t)_{[n]}, \mathbf{F}_p) \quad \text{resp.} \quad H_{\text{ét},c}^m((U_t)_{[n]}, \mathbf{F}_p) \rightarrow H_{\text{ét},c}^m((U_{t+1})_{[n]}, \mathbf{F}_p)$$

est d'image finie par proposition 3.8, où $l := \dim X + 2$.

Il résulte alors du lemme 1.10 que pour tout $n \in \mathbf{N}$. et tout $t \in [1, r+1-(n+1)l]$, l'application

$$H_{\text{ét}}^n(X(\delta_{t+(n+1)l}), \mathbf{F}_p) \rightarrow H_{\text{ét}}^n(X(\delta_t), \mathbf{F}_p) \quad \text{resp.} \quad H_{\text{ét},c}^n(X(\delta_t), \mathbf{F}_p) \rightarrow H_{\text{ét},c}^n(X(\delta_{t+(n+1)l}), \mathbf{F}_p)$$

est d'image finie. □

A Cas de Stein à réduction semi-stable

Faute de validité de la conjecture (0.3), on ne peut pas conclure la profinitude pour un espace de Stein lisse arbitraire de dimension $d \geq 2$ sur K . Cependant, si l'on dispose d'un modèle formel semi-stable *global* au sens suivant, on aura également la profinitude.

A.1 - Définition ([?, 3.1.1]). On dit qu'un espace rigide X sur K est *de Stein à réduction semi-stable* \mathfrak{X} si \mathfrak{X} est un modèle formel (strictement) semi-stable de X sur \mathcal{O}_K dont la fibre spéciale $Y := \mathfrak{X}_s$ admet une famille de sous-schémas fermés $\{Y_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ et une famille de sous-schémas ouverts $\{V_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ tels que

- Y_i est une réunion finie de composantes irréductibles de Y pour tout $i \in \mathbf{N}$,
- $Y_i \subset V_i \subset Y_{i+1}$ et $Y = \bigcup_s Y_i = \bigcup_i U_i$,

— la famille de tubes $\{]V_i[\mathfrak{X}\}_{i \in \mathbf{N}}$ forme un recouvrement de Stein de X .

Comme V_i est un ouvert de Y_i , la tube $]V_i[\mathfrak{X}$ est simplement la fibre générique (rigide) du sous-schéma formel ouvert de \mathfrak{X} supporté sur V_n .

A.2 - Proposition (cf. [6, Théorème 2.1]). *Soit X un espace rigide de dimension d sur K de Stein à réduction semi-stable \mathfrak{X} . Supposons que $\zeta_p \in K$. Alors $H_{\text{ét}}^n(X, \mathbf{F}_p)$ est profini pour tout $n \in \mathbf{N}$.*

Démonstration. Comme $\zeta_p \in K$, on a $\mathbf{F}_p \simeq \mu_p^{\otimes q}$ sur $X_{\text{ét}}$ pour tout $q \in \mathbf{N}$. Convertions les notations V_n, Y_n comme dans la définition précédente pour X de Stein à réduction semi-stable. Notons $U_i :=]V_i[\mathfrak{X}$.

Les Y_i sont propres sur k , donc les adhérences \overline{U}_i dans Y sont aussi propres sur k . Ainsi, d'après (3.4), les applications

$$H_{\text{ét}}^n(U_{i+1}, \mathcal{F}|_{U_{i+1}}) \rightarrow H_{\text{ét}}^n(U_i, \mathcal{F}|_{U_i})$$

sont d'image finie pour tous $n, i \in \mathbf{N}$ et pour tout faisceau étale \mathcal{F} sur Y soit cohérent soit constructible, en particulier lorsque \mathcal{F} est un des gradués $\text{gr}_i^m = \text{gr}_i^m R^q \lambda_* \mathbf{F}_p$ de la filtration de Bloch-Kato-Hyodo sur les cycles proches rigides, où $0 \leq m < e'$, $i \in \{0, 1\}$ et $q \in \mathbf{N}$ (on a aussi $R^q \lambda_* \mathbf{F}_p = 0$ pour $q > d + 1$). En effet, ces morphismes se factorise par $H_{\text{ét}}^n(\overline{U}_i, \mathcal{F}'_i|_{\overline{U}_i})$, où $\mathcal{F}'_i = \text{im}(\mathcal{F}|_{U_{i+1}} \rightarrow j_{i*} j_i^* \mathcal{F}|_{U_{i+1}})$ avec $j_i : U_i \rightarrow U_{i+1}$ l'immersion ouverte canonique. Si \mathcal{F} est un faisceau cohérent, alors les \mathcal{F}'_i sont cohérents supportés sur \overline{U}_i par (3.5). Si \mathcal{F} est constructible, alors \mathcal{F}'_i est constructible en étant un quotient de \mathcal{F} , et est supporté sur \overline{U}_i . La finitude voulue découle alors de la finitude cohomologique étale pour un morphisme propre dans chacun des deux cas.

Procédons à la profinitude. Comme $R\Gamma_{\text{ét}}(X, \mathbf{F}_p) = R \lim_i R\Gamma_{\text{ét}}(U_i, \mathbf{F}_p)$, on a la suite exacte

$$0 \rightarrow R^1 \lim_{i \in \mathbf{N}} H_{\text{ét}}^{n-1}(U_i, \mathbf{F}_p) \rightarrow H_{\text{ét}}^n(X, \mathbf{F}_p) \rightarrow \lim_{i \in \mathbf{N}} H_{\text{ét}}^n(U_i, \mathbf{F}_p) \rightarrow 0$$

pour tout $n \in \mathbf{N}$ par l'annulation de $R^j \lim_{k \in \mathbf{N}}$ pour $j \geq 2$.

La longueur de la filtration sur $R^q \lambda_* \mathbf{F}_p$ étant $2e'$, la finitude précédente combinée avec $2e' - 1$ fois l'application de (1.4) assure que les applications

$$H_{\text{ét}}^n(V_{i+2e'}, R^q \lambda_* \mathbf{F}_p) \rightarrow H_{\text{ét}}^n(V_i, R^q \lambda_* \mathbf{F}_p)$$

sont d'image finie pour tous $n, i, q \in \mathbf{N}$. Alors les suites spectrales

$$E_2^{r,s} = H_{\text{ét}}^r(V_i, R^s \lambda_* \mathbf{F}_p) \implies H_{\text{ét}}^{r+s}(U_i, \mathbf{F}_p)$$

concentrées aux degrés $s \in [0, d + 1]$, compatibles pour $i \in \mathbf{N}$, combinées avec $d + 1$ fois l'application de (1.4) montrent que les applications

$$H_{\text{ét}}^n(U_{i+2e'(d+2)}, \mathbf{F}_p) \rightarrow H_{\text{ét}}^n(U_i, \mathbf{F}_p)$$

sont d'image finie pour tous $n, i \in \mathbf{N}$. Donc le terme $R^1 \lim_i$ s'annule et on obtient

$$H_{\text{ét}}^n(X, \mathbf{F}_p) \xrightarrow{\sim} \lim_i H_{\text{ét}}^n(U_i, \mathbf{F}_p)$$

qui est profini, pour tout $n \in \mathbf{N}$. □

Références

- [1] Artin, M., Grothendieck, A., and Verdier, J.-L. Théorie des Topos et Cohomologie Etale des Schémas. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963-1964 (SGA 4) : Tome 2. *Lect. Notes in Math* 270 (1973).
- [2] Berkovich, V. Complex analytic vanishing cycles for formal schemes. *preprint* (2015).
- [3] Bhatt, B., and Mathew, A. The arc-topology. *Duke Mathematical Journal* 170, 9 (2021), 1899–1988.
- [4] Bosch, S. *Lectures on formal and rigid geometry*. Springer, 2005.
- [5] Bosch, S., and Lütkebohmert, W. Stable reduction and uniformization of abelian varieties i. *Mathematische Annalen* 270 (1985), 349–380.
- [6] Colmez, P., Dospinescu, G., and Nizioł, W. Factorisation de la cohomologie étale p -adique de la tour de drinfeld. In *Forum of Mathematics, Pi* (2023), vol. 11, Cambridge University Press, p. e16.
- [7] Conrad, B. Cohomological descent. *preprint* (2003).
- [8] Conrad, B. Relative ampleness in rigid geometry. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 56, 4 (2006), 1049–1126.
- [9] Deligne, P. Théorie de hodge : Iii. *Publications Mathématiques de l’IHÉS* 44 (1974), 5–77.
- [10] Drinfeld, V. G. Coverings of p -adic symmetric domains. *Funkcional. Anal. i Priložen.* 10, 2 (1976), 29–40.
- [11] Ducros, A. Les espaces de Berkovich sont excellents. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 59, 4 (2009), 1443–1552.
- [12] Ducros, A. La structure des courbes analytiques. *Manuscript available at <http://www.math.jussieu.fr/~ducros/trirss.pdf>* (2014).
- [13] Ducros, A. Families of Berkovich spaces. *Astérisque* (2018), vii+262.
- [14] Genestier, A. *Espaces symétriques de Drinfeld*. No. 234 in Astérisque. Société mathématique de France, 1996.
- [15] Grosse-Klönne, E. Rigid analytic spaces with overconvergent structure sheaf.
- [16] Grothendieck, A. éléments de géométrie algébrique : I. Le langage des schémas. *Publications Mathématiques de l’IHÉS* 4 (1960), 5–228.
- [17] Grothendieck, A. éléments de géométrie algébrique : II. étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes. *Publications Mathématiques de l’IHÉS* 8 (1961), 5–222.
- [18] Grothendieck, A. éléments de géométrie algébrique : IV. étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Seconde partie. *Publications Mathématiques de l’IHÉS* 24 (1965), 5–231.
- [19] Hansen, D. Vanishing and comparison theorems in rigid analytic geometry. *Compositio Mathematica* 156, 2 (2020), 299–324.
- [20] Huber, R. *Étale cohomology of rigid analytic varieties and adic spaces*, vol. E30. Wiesbaden : Vieweg, 1996.
- [21] Kedlaya, K. S., and Liu, R. Relative p -adic Hodge theory, II : Imperfect period rings, 2019.
- [22] Kraft, H. Cohomological dimension of local fields. *Mathematische Zeitschrift* 133 (1973), 257–274.
- [23] Köpf, U. Über eigentliche Familien algebraischer Varietäten über affinoiden Räumen. *Schr. Math. Inst. Univ. Münster* (2) (1974), iv+72.
- [24] Lucas Mann. *A p -Adic 6-Functor Formalism in Rigid-Analytic Geometry*. PhD thesis, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, Aug. 2022.
- [25] Lurie, J. *Higher topos theory*. Princeton University Press, 2009.
- [26] Lurie, J. Higher algebra (2017). *Preprint, available at <https://www.math.ias.edu/~lurie/papers/HA.pdf>* (2016).
- [27] Lütkebohmert, W. Formal-algebraic and rigid-analytic geometry. *Mathematische Annalen* 286 (1990), 341–371.
- [28] Lütkebohmert, W. Riemann’s existence problem for a p -adic field. *Inventiones mathematicae* 111, 1 (1993), 309–330.
- [29] Matsumura, H. *Commutative algebra. 2nd ed*, vol. 56 of *Math. Lect. Note Ser.* The Benjamin/Cummings Publishing Company, Reading, MA, 1980.

- [30] Nizioł, W. Toric singularities : log-blow-ups and global resolutions. *Journal of algebraic geometry* 15, 1 (2006), 1–29.
- [31] Saito, S., and Sato, K. On p -adic vanishing cycles of log smooth families. *Tunisian Journal of Mathematics* 2, 2 (2019), 309–335.
- [32] Saito, T. Log smooth extension of a family of curves and semi-stable reduction. *Journal of Algebraic Geometry* 13, 2 (2004), 287–322.
- [33] Scholze, P. p -adic Hodge theory for rigid-analytic varieties. *Forum Math. Pi* 1 (2013), 77.
- [34] Scholze, P. Étale cohomology of diamonds. *Available at SSRN 3542189* (2017).
- [35] Serre, J.-P. *Représentations linéaires des groupes finis*, revised ed. Hermann, Paris, 1978.
- [36] Stacks Project Authors, T. *Stacks Project*. <https://stacks.math.columbia.edu>, 2018.
- [37] Temkin, M. Altered local uniformization of berkovich spaces. *Israel Journal of Mathematics* 221, 2 (2017), 585–603.
- [38] Temkin, M. Tame distillation and desingularization by p -alterations. *Annals of Mathematics* 186, 1 (2017), 97–126.
- [39] Temkin, M. Functorial desingularization over \mathbf{Q} : boundaries and the embedded case. *Israel J. Math.* 224, 1 (2018), 455–504.
- [40] Tsuji, T. p -adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case. *Inventiones mathematicae* 137, 2 (1999), 233–411.
- [41] Tsuji, T. On the p -adic nearby cycles of log smooth families. *Bulletin de la Société Mathématique de France* 128, 4 (2000), 529–575.