Durée : 1 heure. Aucun document autorisé. Ce contrôle sera noté sur ***10 points****.*

1. (2 pts) Questions de cours :

a) Démontrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si $\alpha > 1$.

b) Énoncer le théorème sur la dérivabilité de la convergence uniforme d'une suite de fonctions.

2. (4 pts) Déterminer la nature des séries numérique suivantes :

a) $\sum_{n\geq 1}(\sqrt[n]{n} - 1)$,

b) $\sum_{n\geq 1}(\sqrt[n]{n} - 1)^n$,

c) $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{\lambda^n}{n}$, pour $\lambda \in \mathbb{R}$,

d) $\sum_{n\geq 1} \frac{(3n)!}{30^n(n!)^3}$.

3. (2 pts, Noyau de Fejér) Considérons la suite de fonctions $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où on définit

$$K_n(x) = \frac{1}{n}\frac{\sin^2(nx/2)}{\sin^2(x/2)}, \quad \forall x \in]0, \pi].$$

Déterminer la limite simple de $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $]0, \pi]$. Déterminer si la convergence est uniforme sur

a) $I =]0, \pi[$;

b) $I = [\delta, \pi]$, où $0 < \delta < \pi$.

(Indication : majorer $\sin^2(nx/2)$ et $\frac{1}{\sin^2(x/2)}$ séparément.)

4. (5 pts) Soit $(f_n : [0, 1] \to \mathbb{C})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues. On suppose que

i) la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction intégrable $f : [0, 1] \to \mathbb{C}$;

ii) la convergence est uniforme sur tout compact inclus dans $]0, 1]$;

iii) **(borne uniforme) il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout n, on a $\|f_n\|_\infty \leq M$.**

Sous ces conditions,

a) Chacune des assertions suivantes est-elle vraie ou fausse ? Démontrer si elle est vraie ; en fournir un contre-exemple avec justification si elle est fausse.

a.1) la limite f est continue sur $[0, 1]$.

a.2) la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur $]0, 1]$.

a.3) Si f est continue sur $[0, 1]$, alors la convergence est uniforme sur $[0, 1]$.

b) Soit $\delta \in]0, 1[$. Montrer que

$$\lim_n \int_\delta^1 f_n(t)dt = \int_\delta^1 f(t)dt$$

et que

$$\left| \int_0^\delta f_n(t)dt - \int_0^\delta f(t)dt \right| \leq 2\delta M.$$

c) En déduire que

$$\lim_n \int_0^1 f_n(t)dt = \int_0^1 f(t)dt.$$

5. (2 pts, Bonus) Soit $\sum_n a_n$ une série divergente avec $a_n > 0$. Notons $S_n = \sum_{k\leq n} a_k$. Montrer que $\sum_n \frac{a_n}{S_n}$ diverge. (Indication : le critère de Cauchy.)